

$\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	6 643																	
4	5	10																
5	31	26	46															
6	7	28	21	67														
7	85	8	85	24	92													
8	9	121	63	18	154	121												
9	127	10	10	109	80	40	154											
10	33	121	55	88	55	121	121	191										
11	255	244	255	12	166	24	36	60	232									
12	65	13	65	26	104	78	65	91	181	277								
13	313	28	42	98	14	235	154	70	222	84	326							
14	15	1210	15	408	135	135	45	30	323	60	253	379						
15	693	16	1265	1612	80	16	316	80	828	48	241	112	436					
16	17	68	17	119	385	85	170	136	353	221	1 172	170	337	497				
17	341	784	341	18	1211	307	18	528	252	36	290	126	90	144	562			
18	325	1733	38	57	209	57	325	209	171	133	1462	209	323	361	433	631		
19	381	20	514	428	80	40	260	20	666	60	362	140	60	80	514	180	704	
20	21	1604	21	126	21	1944	63	273	252	84	761	42	105	421	273	126	541	781

n premiers nombres palindromes tend vers 0 quand n croît. On sait, d'après le théorème d'Hadamard et de La Vallée-Poussin, que la proportion de nombres premiers parmi les n premiers entiers est environ $1/\ln(n)$, où $\ln(x)$ désigne le logarithme népérien de x . On conjecture donc, sans toutefois savoir le démontrer, un résultat analogue pour les nombres palindromes: la proportion d'entiers premiers parmi les n premiers nombres palindromes serait $1/\ln(n)$.

Une conjecture intéressante a été imaginée en 2014 par Ivan Ianakiev: les seuls nombres palindromes premiers dont le numéro d'ordre dans la suite des nombres premiers est un nombre premier palindrome sont 3 (qui est deuxième), 5 (qui est troisième) et 11 (qui est cinquième). La conjecture a été testée pour les huit premiers millions de nombres premiers ayant des numéros d'ordre qui sont des nombres premiers palindromes.

Par jeu, le mathématicien brésilo-canadien Paulo Ribenboim a proposé de dénommer «nombre premier triplement palindrome» un nombre premier palindrome de m chiffres décimaux, où m est un nombre premier palindrome de n chiffres décimaux, où n est lui-même un

Voici les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, a et b variant de 2 à 20 ($a < b$). Ce tableau a été établi par Erich Friedman. Ainsi, pour $a = 2$ et $b = 3$, il faut aller jusqu'à 6 643 pour trouver un nombre qui convient: $6\,643_{10} = 110011111011_2 = 100010001_3$.

nombre premier palindrome. Le plus petit de ces nombres, nécessairement rares, est 10 000 500 001, qui comporte 11 chiffres; 11 est un nombre premier palindrome lui-même constitué de 2 chiffres, 2 étant un nombre premier palindrome.

Plus intéressant, $10^{11310} + 4661664 \times 10^{5652} + 1$ est formé de 11311 chiffres, le nombre 11311 étant un nombre premier palindrome qui a lui-même 5 chiffres, 5 étant encore un nombre premier palindrome. Bien évidemment, on ignore s'il existe une infinité de ces nombres premiers triplement palindromes.

La notion de nombre palindrome dépend bien sûr de la base de numération, et jusqu'ici nous n'avons envisagé que la base 10. Que se passe-t-il pour les autres bases?

CHANGEONS LES BASES

Les calculs du nombre de palindromes faits pour la base 10 se généralisent à toute base $b > 1$. La propriété «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base 10 sont multiples de 11» devient: «Les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base b sont multiples de $(b+1)$ ». Par exemple, le nombre N dont l'écriture en base 5 est 123321₅ est divisible par 6: $123321_5 = 5^5 + 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 1 = 4836 = 806 \times 6$.

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9+2	11
3	7×7×7	343
4	9×(9×9+2)	747
5	9×9×9×9-5	6 556
6	3×7×7×8×8×8	65 856
7	8×8×8×8×9×(9+2)	405 504
8	8×9×9×9×9×9-4	4 251 524
9	8×8×(5×6×8×8×8×9+2)	8 847 488
10	7×7×7×8×(7×8×8×8×9-4)	88 499 488
11	6×8×8×8×9×(6×7×9×9×9+8)	846 747 648
12	7×8×8×8×8×9×(4×7×7×9×9-3)	4 095 995 904
13	9×9×9×9×9×9×(6×7×7×7×9-8)	68 899 199 886
14	(9×9×9×9×9×5+4)×(8×8×8×8×9×9-5)	97 955 055 979
15	7×8×(5×9×9×9×9×9-7)×(8×9×9×9×9-7)	867 685 586 768

À VOS CRAYONS !

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés. Le Français Marc Lapierre a mené les calculs pour les trois dernières lignes.

> Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24: $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^A = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?» Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?» Une petite exploration montre aisément que oui. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$. Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Il est aussi intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est la «conjecture faible de Goldbach», qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach qui, elle, attend toujours une démonstration.

LES SOMMES DE PALINDROMES

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers (la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane) qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083...

Comment le vérifier? On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

Joseph DeVincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue: en effectuant la somme de deux nombres palindromes, on n'obtient qu'une petite partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent, mais lui aussi tout aussi définitif: «Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus.» Le nombre 2000, par exemple, est la somme de 616, 383 et 1001. Le résultat a été obtenu en deux temps. D'abord, en 2015, William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où, progressivement, on remplacerait 49 par des entiers de plus en plus petits.

En fait, l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup. Javier Cilleruelo, de l'université