

Nombre de chiffres	Formule	Palindrome
1	9	9
2	9+2	11
3	7×7×7	343
4	9×(9×9+2)	747
5	9×9×9×9-5	6 556
6	3×7×7×8×8×8	65 856
7	8×8×8×8×9×(9+2)	405 504
8	8×9×9×9×9×9×9-4	4 251 524
9	8×8×(5×6×8×8×8×9+2)	8 847 488
10	7×7×7×8×(7×8×8×8×9-4)	88 499 488
11	6×8×8×8×9×(6×7×9×9×9+8)	846 747 648
12	7×8×8×8×8×9×(4×7×7×9×9-3)	4 095 995 904
13	9×9×9×9×9×9×(6×7×7×7×9-8)	68 899 199 886
14	(9×9×9×9×9×5+4)×(8×8×8×8×9×9-5)	97 955 055 979
15	7×8×(5×9×9×9×9×9-7)×(8×9×9×9×9-7)	867 685 586 768

À VOS CRAYONS !

On recherche les combinaisons de chiffres qui, multipliés ou additionnés en utilisant la disposition de parenthèses qu'on veut, donnent le plus grand nombre palindrome. Par exemple, avec 4 chiffres, la formule $9 \times (9 \times 9 + 2)$ donne 747, qui est le plus grand nombre palindrome

qu'on peut obtenir ainsi. Le tableau ci-dessus est dû à Erich Friedman (www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html). Saurez-vous le poursuivre ? Ces résultats sont prouvés jusqu'à 9 chiffres utilisés. Le Français Marc Lapierre a mené les calculs pour les trois dernières lignes.

> Une étrange curiosité a été notée pour le nombre 5 et la base 24. Parmi les petites puissances de 5, 10 sont des palindromes en base 24: $5^0 = 1_{24}$; $5^1 = 5_{24}$; $5^2 = 11_{24}$; $5^3 = 55_{24}$; $5^4 = 121_{24}$; $5^5 = 5A5_{24}$; $5^6 = 1331_{24}$; $5^7 = 5FF5_{24}$; $5^8 = 14641_{24}$; $5^9 = 15151_{24}$ (en base 24, on convient de noter les 24 chiffres 0, 1, 2, ..., 7, 8, 9, A, B, C, ..., L, M, N, ce qui explique la présence des lettres dans ces formules).

Une question vient naturellement à l'esprit: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois?» Remarquons d'abord que si n est un nombre quelconque, il est palindrome dans toutes les bases b où $b > n$, car n s'y écrit alors avec un seul chiffre. C'est un peu facile! Il n'est donc intéressant que de considérer des bases $b \leq n$.

La question devient: «Existe-t-il des nombres n qui sont palindromes dans plusieurs bases de numération b à la fois, avec $b < n$?» Une petite exploration montre aisément que oui. Un bel exemple est 105. En effet: $105_{10} = 1221_4 = 151_8 = 77_{14} = 33_{34}$. Le tableau de la figure 3 donne les plus petits entiers palindromes dans deux bases a et b à la fois, pour a et b variant de 2 à 19. Il a été établi par Erich Friedman, de l'université Stetson, en Floride.

Il est aussi intéressant de savoir si les nombres de la suite F_n de Fibonacci ($F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ pour $n > 1$) sont parfois des palindromes. Les seuls connus jusqu'à présent sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 55. On démontre que la densité des entiers n tels que F_n est un palindrome est nulle à l'infini, mais on se demande si en réalité les termes palindromes de la suite cités au-dessus ne sont pas les seuls: encore une conjecture!

En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. C'est la «conjecture faible de Goldbach», qui est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontrée en 2013 par le mathématicien péruvien Harald Helfgott, chercheur du CNRS à Paris. Lorsqu'on additionne deux nombres premiers, il semble possible d'obtenir tout nombre pair à partir de 4. C'est la fameuse conjecture de Goldbach qui, elle, attend toujours une démonstration.

LES SOMMES DE PALINDROMES

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes? Donnent-elles tous les entiers? Combien faut-il de palindromes pour obtenir tout entier dans le pire cas? Les nombres palindromes étant plus faciles à maîtriser que les nombres premiers, on connaît aujourd'hui les réponses à ces questions.

Le premier résultat est que les sommes de deux nombres palindromes ne donnent pas tous les entiers. Voici la suite des nombres entiers (la suite A035137 de l'encyclopédie de Neil Sloane) qui ne s'écrivent pas comme la somme de deux palindromes: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 201, 1031, 1041, 1042, 1051, 1052, 1053, 1061, 1062, 1063, 1064, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1081, 1082, 1083...

Comment le vérifier? On considère les $n+1$ façons d'écrire n comme une somme $a+b$ de deux entiers, et on constate que a et b ne sont jamais simultanément palindromes.

Joseph DeVincentis et Ulrich Schimke ont démontré qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas somme de deux nombres palindromes. L'affaire est entendue: en effectuant la somme de deux nombres palindromes, on n'obtient qu'une petite partie des entiers.

Le plus beau résultat concernant les sommes de palindromes est récent, mais lui aussi tout aussi définitif: «Tout nombre entier est somme de trois nombres palindromes au plus.» Le nombre 2000, par exemple, est la somme de 616, 383 et 1001. Le résultat a été obtenu en deux temps. D'abord, en 2015, William Banks a démontré qu'en base 10, tout entier est somme d'au plus 49 nombres palindromes. Il semblait alors qu'on était au début d'une série de résultats où, progressivement, on remplacerait 49 par des entiers de plus en plus petits.

En fait, l'affaire fut magistralement traitée d'un seul coup. Javier Cilleruelo, de l'université