

de Madrid, et Florian Luca, mathématicien roumain aujourd'hui à l'université de Witwatersrand, à Johannesburg (Afrique du Sud), ont en effet démontré en 2016 dans un article de 39 pages que: «Dans toute base $b \geq 5$, tout entier s'écrit comme une somme d'au plus trois nombres palindromes.» La démonstration est constructive, puisqu'elle décrit un algorithme qui conduit, pour tout entier donné, à la somme recherchée. Cette prouesse rappelle la démonstration de Gauss en 1796 établissant que tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $n(n+1)/2$).

L'article revient aussi sur les sommes de deux palindromes et montre que les entiers qui ne sont pas somme de deux palindromes sont très nombreux dans le sens suivant: pour chaque base $b \geq 2$, il existe une constante strictement positive c telle que les nombres qui ne sont pas somme de deux palindromes représentent une proportion des nombres entiers supérieure à c . Javier Cilleruelo et Florian Luca conjecturent, sans toutefois réussir à la démontrer, une propriété analogue pour les nombres entiers qui sont la somme de deux palindromes.

INFINIMENT PALINDROME

Terminons par un remarquable résultat sur les palindromes infinis. De quoi s'agit-il ? Considérons la suite de symboles composée uniquement de a et de b définie en partant de ab

BIBLIOGRAPHIE

J. CILLERUELO ET F. LUCA, Every positive integer is a sum of three palindromes : arXiv:1602.06208, 2016.

A. BÉRCZES ET V. ZIEGLER, On simultaneous palindromes, J. Comb. Number Theory, vol. 6, pp. 37-49, 2014.

Y. BUGEAUD, Automatic continued fractions are transcendental or quadratic : arXiv:1012.1709, 2010.

B. ADAMCZEWSKI ET Y. BUGEAUD, Palindromic continued fractions, Annales de l'institut Fourier, vol. 57(5), pp. 1557-1574, 2007.

G. L. HONAKER ET C. CALDWELL, Palindromic prime pyramids, Journal of Recreational Mathematics, vol. 30(3), pp. 169-176, 2000.

E. FRIEDMAN, Problem of the Month, juin 1999: www2.stetson.edu/~efriedma/mathmagic/0699.html

et en ajoutant son complément ba (chaque a est remplacé par b et chaque b par a), ce qui donne $abba$, puis en recommençant en ajoutant le complément de ce qu'on vient d'obtenir, ce qui donne $abbabaab$, et en recommençant indéfiniment : $abbabaabbaababba, abbabaabbaababbabaababbaabbaab...$

On obtient une suite infinie de a et de b dont les 4 premiers symboles sont un palindrome, de même que les 16 premiers symboles, de même que les 64 premiers symboles... On dit que c'est un mot «infiniment palindrome»: ses débuts sont une infinité de fois des palindromes.

Quand on dispose d'une suite infinie d'entiers positifs $a_0, a_1, a_2, \dots$ il est usuel en arithmétique de considérer le nombre réel suivant dénommé fraction continue associée à la suite $a_0, a_1, a_2, \dots$:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Un extraordinaire résultat de Boris Adamczewski et Yann Bugeaud établit que si la suite de nombres entiers est infiniment palindrome, alors le nombre réel défini par la fraction continue associée est soit un nombre quadratique, soit un nombre transcendant, c'est-à-dire que soit il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers de degré 2 au plus, soit il n'est la solution d'aucune équation polynomiale à coefficients entiers.

Dit encore autrement, les nombres réels définis par des fractions continues infiniment palindromes sont élémentaires ou alors aussi compliqués que les nombres π ou e (qui sont transcendants). C'est un moyen nouveau de définir des nombres transcendants. En particulier, le nombre x obtenu en prenant $a = 1$ et $b = 2$ dans le mot infiniment palindrome indiqué plus haut et en écrivant la fraction continue associée est transcendant:

$$x = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

On aimerait avoir un résultat analogue concernant les nombres dont l'écriture en base B est une suite infiniment palindrome. Mais pour l'instant, les techniques disponibles achoppent et à nouveau on est réduits à des conjectures.

Amusements sans prétention ou résultats profonds et difficiles, voire seulement conjecturés, les palindromes occupent passionnément les mathématiciens qui y découvrent mille merveilles insoupçonnées. ■

PYRAMIDES

2	2	3	3	5	5	5	7
929	929	131	131	151	353	757	373
39293	39293	11311	71317	31513	33533	37573	93739
7392937	3392933			3315133	1335331	9375739	
373929373	733929337						

Si, en partant d'un chiffre considéré comme sommet, on cherche à construire une pyramide de nombres premiers palindromes dont chaque étage coïncide avec l'étage juste au-dessus et ne dépasse que d'un chiffre à droite et à gauche de l'étage juste au-dessus, on est vite arrêté. Seules les pyramides indiquées ci-dessus sont possibles. En s'autorisant un élargissement de deux chiffres à droite et à gauche à chaque étage, on obtient beaucoup mieux (toujours en n'utilisant que des nombres premiers palindromes). La hauteur maximale des pyramides les plus hautes de sommet 2 est 26 et il y a deux solutions, la dernière ligne

de l'une d'elles étant:
131892729933733012747515193894339
0119712723396357020753693327217911
093349891515747210337339927298131.
Si, au sommet, on place le chiffre 3, on trouve trois pyramides de hauteur 28. En partant de 5 ou 7, on trouve à chaque fois une pyramide de hauteur 29. Tous ces résultats proviennent de G. L. Honaker et Chris Caldwell, deux passionnés américains des nombres premiers. On trouvera des compléments à leur article de 2000 sur: www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/step_size2.html et sur: www.utm.edu/staff/caldwell/supplements/

L'ESSENTIEL

● L'énoncé est simple: «Quand on part d'un entier positif n quelconque et que, de manière répétée, on le divise par 2 s'il est pair et on le remplace par $3n+1$ s'il est impair, on finit toujours par tomber sur 1.»

● Pourtant, cette conjecture dite de Syracuse, ou $3n+1$, n'a toujours pas été démontrée. Mais elle a été vérifiée jusqu'à $n = 5 \times 10^{18}$.

● De nombreux travaux portent sur des variantes du problème ou sur certaines parties, notamment sur la longueur des cycles dans les valeurs rencontrées.

● La longueur d'un tel cycle est soit 3 soit supérieure à $17\,026679261$! La démonstration de ce résultat est déjà une prouesse.

L'AUTEUR



SHALOM ELIAHOU est professeur à l'université du Littoral Côte d'Opale, à Calais.

26

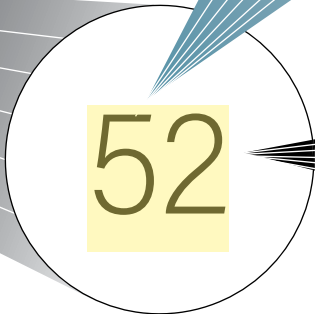
13

40

Prenez un nombre quelconque. S'il est pair, divisez-le par 2, sinon multipliez-le par 3 et ajoutez 1. Puis recommencez avec le nouveau nombre obtenu. Vous tomberez toujours sur 1. Enfin, on le suppose, car on n'a jamais su le démontrer...

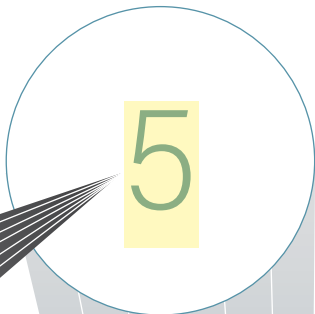
10

20



52

Élémentaire, mais redoutable



5

Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, quel est celui dont l'énoncé est le plus élémentaire ? C'est peut-être bien la conjecture de Syracuse : accessible à tous dans son énoncé, elle défie les chercheurs depuis des décennies.

D

ans les années 1960, une conjecture a occupé tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, certains y ont vu une conspiration soviétique destinée à détourner les esprits américains. Cette conjecture a reçu les noms Collatz, Kakutani, $3n+1$, Syracuse... Et c'est sous ce dernier qu'elle est la plus connue, car l'université de Syracuse (rien à voir avec la Sicile), aux États-Unis, a joué un rôle important dans la popularisation du problème.

Pourquoi est-il si célèbre ? Sans doute parce que le problème $3n+1$ offre un contraste saisissant : il est d'un côté extrêmement simple à énoncer et de l'autre, particulièrement difficile à résoudre. De quoi s'agit-il ? On définit la règle de transformation sur les nombres entiers 1, 2, 3... suivante : étant donné un entier naturel n non-nul quelconque, si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3n+1$). Par exemple, avec le nombre 14, cette transformation donne 7 ; et appliquée à 7 elle donne 22. On écrira $14 \rightarrow 7 \rightarrow 22$, et plus généralement $n \rightarrow m$ si appliquée à n elle donne m . La transformation est dite de Collatz, du nom de son inventeur, dans les années 1930 semble-t-il.

Le problème $3n+1$ se pose en ces termes : partons d'un nombre entier positif quelconque, et appliquons-lui cette transformation de façon répétée (on parle de trajectoire). ➤