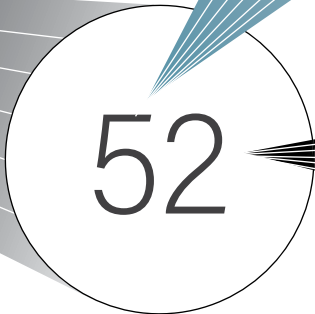
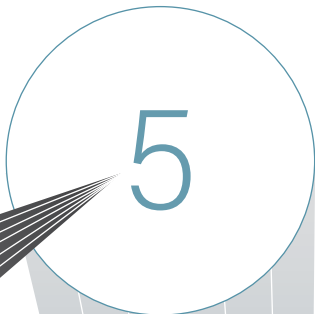




52

Élémentaire, mais redoutable



5

Parmi tous les problèmes mathématiques actuellement non résolus, quel est celui dont l'énoncé est le plus élémentaire ? C'est peut-être bien la conjecture de Syracuse : accessible à tous dans son énoncé, elle défie les chercheurs depuis des décennies.

D

ans les années 1960, une conjecture a occupé tant de mathématiciens que, dans l'ambiance de la guerre froide, certains y ont vu une conspiration soviétique destinée à détourner les esprits américains. Cette conjecture a reçu les noms Collatz, Kakutani, $3n+1$, Syracuse... Et c'est sous ce dernier qu'elle est la plus connue, car l'université de Syracuse (rien à voir avec la Sicile), aux États-Unis, a joué un rôle important dans la popularisation du problème.

Pourquoi est-il si célèbre ? Sans doute parce que le problème $3n+1$ offre un contraste saisissant : il est d'un côté extrêmement simple à énoncer et de l'autre, particulièrement difficile à résoudre. De quoi s'agit-il ? On définit la règle de transformation sur les nombres entiers 1, 2, 3... suivante : étant donné un entier naturel n non-nul quelconque, si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1 ($3n+1$). Par exemple, avec le nombre 14, cette transformation donne 7 ; et appliquée à 7 elle donne 22. On écrira $14 \rightarrow 7 \rightarrow 22$, et plus généralement $n \rightarrow m$ si appliquée à n elle donne m . La transformation est dite de Collatz, du nom de son inventeur, dans les années 1930 semble-t-il.

Le problème $3n+1$ se pose en ces termes : partons d'un nombre entier positif quelconque, et appliquons-lui cette transformation de façon répétée (on parle de trajectoire).

➤ Est-il vrai que l'on finira tôt ou tard par tomber sur 1 ? Tous les calculs faits à ce jour confirment cette prédiction. Mais voilà, personne jusqu'à présent ne sait comment la démontrer, et ce n'est pas faute d'avoir essayé. D'ailleurs, selon le grand Paul Erdős, les mathématiques ne seraient pas encore assez mûres pour espérer résoudre cet innocent petit problème. En 1995, en Hongrie, j'ai essayé d'engager une discussion avec lui sur ce problème. Sa réaction fut sans appel : « C'est sans espoir ».

Quelques exemples s'imposent. Partons d'abord de 1 lui-même. Sa trajectoire est :

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

On obtient un cycle de longueur 3 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) qui se répète. Ce cycle est dit trivial.

Second exemple, en partant de $n = 3$, on retrouve le même cycle :

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Enfin, avec $n = 7$, on obtient :

$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow$

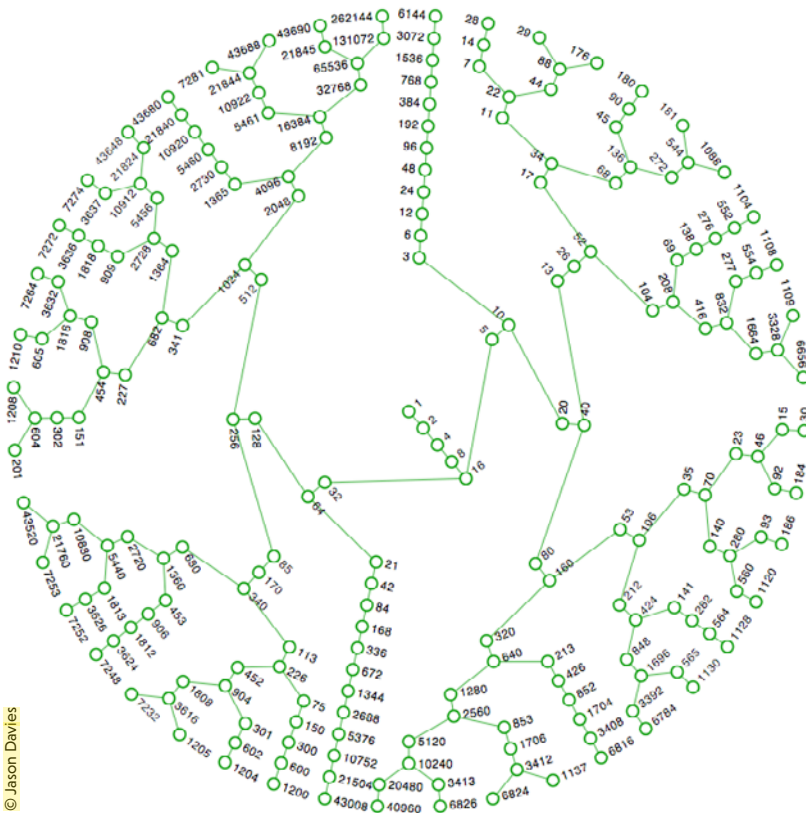
$40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Encore 1 !

Certaines trajectoires sont spectaculaires et valent le détour. Celle de $n = 27$, par exemple, est une montagne russe qui monte vers des hauteurs inattendues (jusqu'à 9232). Mais rien n'y fait, après 111 étapes (c'est la durée de vol), elle retombe sur 1. Vous pouvez expérimenter ici : <http://l.pellegrino.free.fr/syracuse/index.php>

Depuis 2009, Tomás Oliveira e Silva, de l'université d'Aveiro, au Portugal, détient le

Cet arbre relie les nombres qui, par la transformation de Collatz, aboutissent à 1 via des trajectoires inférieures à 20 étapes.



© Jason Davies

record de vérification du problème $3n+1$ par ordinateur. Il a vérifié qu'effectivement, la trajectoire de tout nombre entier positif inférieur à $1,003 \times 10^{20}$ retombe bel et bien sur 1.

Le profil type du problème $3n+1$ est celui d'une fonction simple à définir (l'énoncé est accessible à un enfant de 8 ans), mais dont le comportement devient difficile à prédire lorsqu'on l'itère, c'est-à-dire lorsqu'on l'applique de façon répétée. C'est un système dynamique discret. Des centaines de chercheurs, depuis des décennies, tentent encore de résoudre ce problème. Il en a résulté un grand nombre de publications scientifiques, avec des résultats partiels et des études de problèmes analogues. Mais toujours pas de solution... C'est vexant...

DEUX SOUS-PROBLÈMES

Le problème $3n+1$ est un pari sur le comportement à long terme des trajectoires des entiers positifs pour la transformation de Collatz, à savoir que toute trajectoire finit par atteindre 1. En amont de ce pari spécifique, il est naturel de se demander, en toute généralité, quels sont les comportements possibles à long terme d'une trajectoire quelconque. Eh bien, il n'y a ici que deux possibilités : ou bien la trajectoire considérée est plafonnée, ou bien elle ne l'est pas.

Dire qu'elle est plafonnée signifie qu'aussi loin qu'on la parcourt, ses termes restent toujours en dessous d'un certain plafond. C'est le cas par exemple pour la trajectoire de 3, qui reste indéfiniment en dessous de 16. De même, la trajectoire de 7 est plafonnée par 52. Notons qu'une trajectoire plafonnée contiendra forcément, tôt ou tard, des répétitions. Dans ce cas, la trajectoire finit par s'enrouler dans un cycle. Nous avons rencontré le cycle ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$), mais y en a-t-il d'autres ?

À l'inverse, une trajectoire non plafonnée file inexorablement vers l'infini, malgré un inévitable parcours en dents de scie. En d'autres termes, en cheminant loin dans la trajectoire, on trouvera forcément un terme supérieur à 100, puis plus loin, un autre supérieur à 1000, puis plus loin encore, un autre supérieur à 10000... Techniquement parlant, on dit qu'une telle trajectoire diverge.

Le problème $3n+1$ se réduit donc à deux sous-problèmes : est-il vrai que le seul cycle est ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) ? Est-il vrai qu'il n'y a aucune trajectoire divergente ? On ne sait résoudre aucun de ces deux sous-problèmes. La solution de l'un ou l'autre serait d'ailleurs considérée, à juste titre, comme un progrès majeur. Illustrons cette situation dans des contextes légèrement différents.

Les règles définissant la transformation de Collatz, selon la parité du nombre considéré, gardent tout leur sens avec des nombres entiers négatifs. Par exemple, -1 est impair, et va donc