

➤ Est-il vrai que l'on finira tôt ou tard par tomber sur 1 ? Tous les calculs faits à ce jour confirment cette prédiction. Mais voilà, personne jusqu'à présent ne sait comment la démontrer, et ce n'est pas faute d'avoir essayé. D'ailleurs, selon le grand Paul Erdős, les mathématiques ne seraient pas encore assez mûres pour espérer résoudre cet innocent petit problème. En 1995, en Hongrie, j'ai essayé d'engager une discussion avec lui sur ce problème. Sa réaction fut sans appel : « C'est sans espoir ».

Quelques exemples s'imposent. Partons d'abord de 1 lui-même. Sa trajectoire est :

$1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

On obtient un cycle de longueur 3 ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) qui se répète. Ce cycle est dit trivial.

Second exemple, en partant de $n = 3$, on retrouve le même cycle :

$3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Enfin, avec $n = 7$, on obtient :

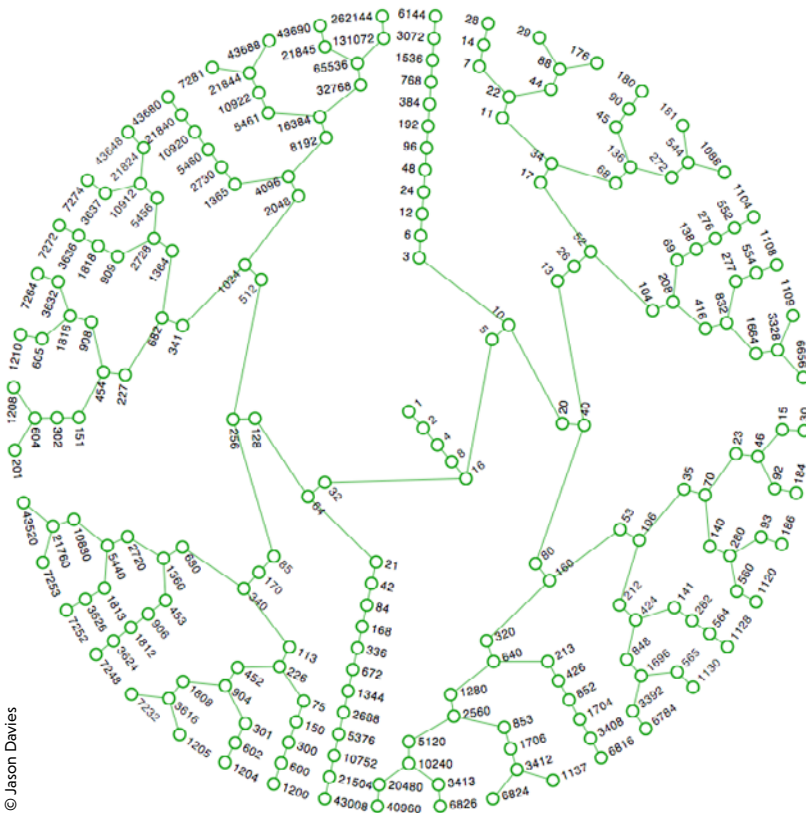
$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Encore 1 !

Certaines trajectoires sont spectaculaires et valent le détour. Celle de $n = 27$, par exemple, est une montagne russe qui monte vers des hauteurs inattendues (jusqu'à 9232). Mais rien n'y fait, après 111 étapes (c'est la durée de vol), elle retombe sur 1. Vous pouvez expérimenter ici : <http://l.pellegrino.free.fr/syracuse/index.php>

Depuis 2009, Tomás Oliveira e Silva, de l'université d'Aveiro, au Portugal, détient le

Cet arbre relie les nombres qui, par la transformation de Collatz, aboutissent à 1 via des trajectoires inférieures à 20 étapes.



© Jason Davies

record de vérification du problème $3n+1$ par ordinateur. Il a vérifié qu'effectivement, la trajectoire de tout nombre entier positif inférieur à $1,003 \times 10^{20}$ retombe bel et bien sur 1.

Le profil type du problème $3n+1$ est celui d'une fonction simple à définir (l'énoncé est accessible à un enfant de 8 ans), mais dont le comportement devient difficile à prédire lorsqu'on l'itère, c'est-à-dire lorsqu'on l'applique de façon répétée. C'est un système dynamique discret. Des centaines de chercheurs, depuis des décennies, tentent encore de résoudre ce problème. Il en a résulté un grand nombre de publications scientifiques, avec des résultats partiels et des études de problèmes analogues. Mais toujours pas de solution... C'est vexant...

DEUX SOUS-PROBLÈMES

Le problème $3n+1$ est un pari sur le comportement à long terme des trajectoires des entiers positifs pour la transformation de Collatz, à savoir que toute trajectoire finit par atteindre 1. En amont de ce pari spécifique, il est naturel de se demander, en toute généralité, quels sont les comportements possibles à long terme d'une trajectoire quelconque. Eh bien, il n'y a ici que deux possibilités : ou bien la trajectoire considérée est plafonnée, ou bien elle ne l'est pas.

Dire qu'elle est plafonnée signifie qu'aussi loin qu'on la parcourt, ses termes restent toujours en dessous d'un certain plafond. C'est le cas par exemple pour la trajectoire de 3, qui reste indéfiniment en dessous de 16. De même, la trajectoire de 7 est plafonnée par 52. Notons qu'une trajectoire plafonnée contiendra forcément, tôt ou tard, des répétitions. Dans ce cas, la trajectoire finit par s'enrouler dans un cycle. Nous avons rencontré le cycle ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$), mais y en a-t-il d'autres ?

À l'inverse, une trajectoire non plafonnée file inexorablement vers l'infini, malgré un inévitable parcours en dents de scie. En d'autres termes, en cheminant loin dans la trajectoire, on trouvera forcément un terme supérieur à 100, puis plus loin, un autre supérieur à 1000, puis plus loin encore, un autre supérieur à 10000... Techniquement parlant, on dit qu'une telle trajectoire diverge.

Le problème $3n+1$ se réduit donc à deux sous-problèmes : est-il vrai que le seul cycle est ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$) ? Est-il vrai qu'il n'y a aucune trajectoire divergente ? On ne sait résoudre aucun de ces deux sous-problèmes. La solution de l'un ou l'autre serait d'ailleurs considérée, à juste titre, comme un progrès majeur. Illustrons cette situation dans des contextes légèrement différents.

Les règles définissant la transformation de Collatz, selon la parité du nombre considéré, gardent tout leur sens avec des nombres entiers négatifs. Par exemple, -1 est impair, et va donc

sur $3 \times (-1) + 1 = -2$ par la transformation de Collatz. De même, on a $-2 \rightarrow -1$. On observe ainsi, sur les entiers négatifs, un cycle de longueur 2. Or là, surprise, ce n'est pas le seul ! On en connaît même deux autres :

La trajectoire de -5 est un cycle de longueur 5 : $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5 \dots$ Quant à -17 , il donne un cycle de longueur 18 (voir la figure ci-contre). Cette présence de trois cycles différents sur les entiers négatifs (on pense que ce sont les seuls) rend d'autant plus intéressante la prédiction selon laquelle il n'y aurait qu'un seul cycle sur les entiers positifs.

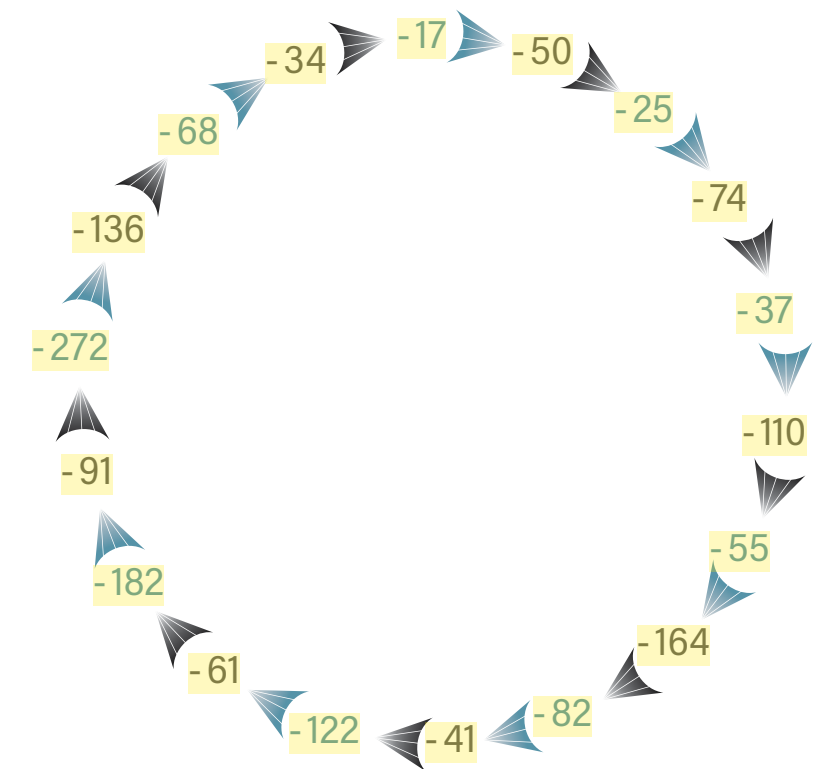
DIVERGENTE OU NON ?

Une variante de la transformation de Collatz, où l'on remplace $3n+1$ par $5n+1$, illustre simultanément les deux sous-problèmes (voir l'encadré ci-dessous). La différence est légère... et pourtant !

Pourquoi semble-t-il y avoir des trajectoires divergentes avec $(5n+1)/2$, mais pas avec $3n+1$ ni avec, ce qui revient au même, $(3n+1)/2$? Ce ne sont encore que des observations empiriques qui demandent à être formellement prouvées ; mais d'où peut bien venir cette différence de comportement ?

Voici une explication intuitive possible, fondée sur quelques approximations, une hypothèse osée mais plausible et, en fin de compte, sur le fait que $5/4$ est supérieur à 1 alors que $3/4$ ne l'est pas.

Cheminons le long de la trajectoire de 7 par exemple, d'abord pour la transformation $\rightarrow$. Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie par $1/2$ s'il est pair, ou par environ $5/2$ s'il



Avec des nombres négatifs, la transformation de Collatz peut créer des cycles, ici de longueur 18.

est impair. Admettons que, lors de ce cheminement, on rencontre à peu près autant de pairs que d'impairs (c'est l'hypothèse osée !). Alors, si l'on marche jusqu'au 21 millionième terme par exemple, celui-ci devrait valoir environ : $7 \times (1/2)^{10500000} \times (5/2)^{10500000}$, soit $7 \times (5/4)^{10500000}$.

Or $5/4$ étant plus grand que 1, ses puissances successives grandissent sans limites. Le nombre ci-dessus compte d'ailleurs 1017556 chiffres avant la virgule, ce qui en fait une assez bonne approximation du vrai 21 millionième terme de la trajectoire de 7 avec ses 1016568 chiffres.

En revanche, le même raisonnement avec la transformation $\rightarrow$ ferait intervenir une grosse puissance de $3/4$. Celui-ci étant inférieur à 1, ses puissances successives tendent vers 0. C'est cela qui semble empêcher l'existence de trajectoires divergentes pour la transformation de Collatz.

Parmi les résultats partiels connus sur le problème $3n+1$, l'un affirme que si, contre toute attente, il existait un cycle autre que $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$, de longueur 3, alors il serait forcément gigantesque. Un théorème précise les choses : la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et environ 17000000000.

Comment prouver une telle affirmation ? D'abord, en montrant qu'il n'existe aucun cycle de longueur 5 pour la transformation de Collatz sur les entiers positifs. L'intérêt de cette preuve est d'être assez élémentaire, tout en contenant déjà l'idée essentielle pour la suite : la mise en évidence d'une équation très contraignante associée à un cycle. Pour la longueur 5, >

LA VARIANTE $5n+1$

Pour étudier les cycles et la divergence du problème $3n+1$, on peut s'intéresser à une variante : $5n+1$. En fait, pour accélérer un peu le cheminement dans les trajectoires, on remplace $5n+1$ par $(5n+1)/2$ plutôt que par $5n+1$. Les règles deviennent : si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on l'envoie sur $(5n+1)/2$. On utilisera le symbole $>$ pour dénoter cette nouvelle transformation. Voici par exemple la trajectoire de 1 : $1 > 3 > 8 > 4 > 2 > 1 \dots$ Un beau cycle de longueur 5.

Voici un autre cycle, cette fois de longueur 7 :

$13 > 33 > 83 > 208 > 104 > 52 > 26 > 13 \dots$ Partons maintenant de $n=7$.

Là, un nouveau phénomène se manifeste. En effet, les 16 premiers termes de la trajectoire sont :

$7 > 18 > 9 > 23 > 58 > 29 > 73 > 183 > 458 > 229 > 573 > 1433 >$

$3583 > 8958 > 4479 > 1198$. Cela grimpe vite.

Allons un peu plus loin. Le 1000^e terme de cette trajectoire est :

6857007305798959806990948240228589098703203749.

Un nombre à 46 chiffres ! On continue ? Jonathan Chappelon a bien voulu pousser le calcul de cette trajectoire jusqu'à son 21 millionième terme.

Le nombre obtenu n'est même plus montrable : il a plus d'un million de chiffres (exactement 1016568) ! Il y a donc une très forte présomption que la trajectoire de 7 diverge ; mais personne à ce jour ne sait le démontrer. Pire : on pense que la plupart des trajectoires de cette transformation sont divergentes, mais personne ne sait prouver qu'il en existe au moins une qui le soit vraiment.