

sur $3 \times (-1) + 1 = -2$ par la transformation de Collatz. De même, on a $-2 \rightarrow -1$. On observe ainsi, sur les entiers négatifs, un cycle de longueur 2. Or là, surprise, ce n'est pas le seul ! On en connaît même deux autres :

La trajectoire de -5 est un cycle de longueur 5 : $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5 \dots$ Quant à -17 , il donne un cycle de longueur 18 (voir la figure ci-contre). Cette présence de trois cycles différents sur les entiers négatifs (on pense que ce sont les seuls) rend d'autant plus intéressante la prédiction selon laquelle il n'y aurait qu'un seul cycle sur les entiers positifs.

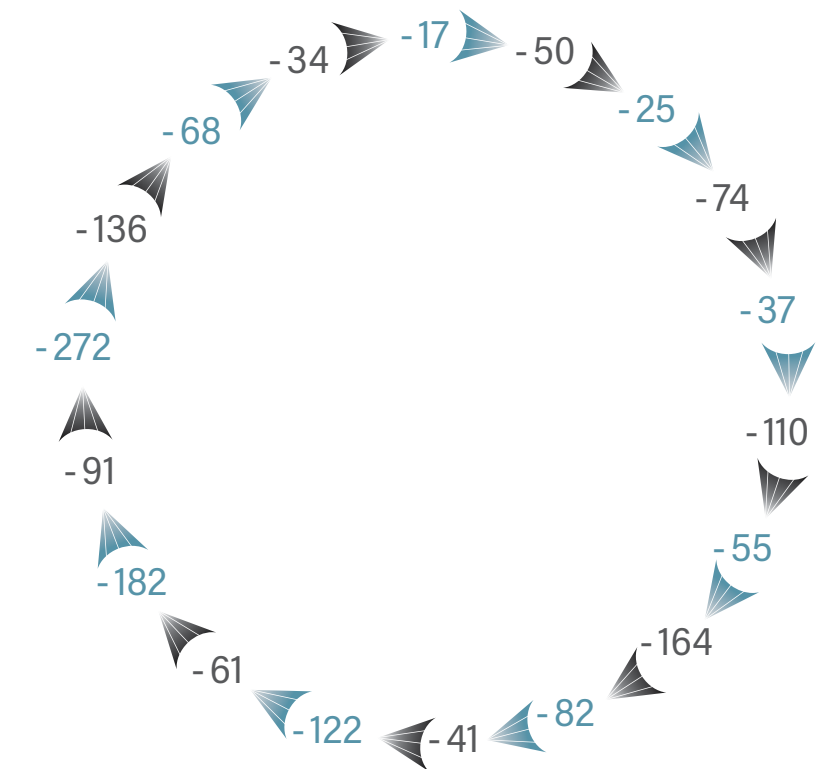
DIVERGENTE OU NON ?

Une variante de la transformation de Collatz, où l'on remplace $3n+1$ par $5n+1$, illustre simultanément les deux sous-problèmes (voir l'encadré ci-dessous). La différence est légère... et pourtant !

Pourquoi semble-t-il y avoir des trajectoires divergentes avec $(5n+1)/2$, mais pas avec $3n+1$ ni avec, ce qui revient au même, $(3n+1)/2$? Ce ne sont encore que des observations empiriques qui demandent à être formellement prouvées ; mais d'où peut bien venir cette différence de comportement ?

Voici une explication intuitive possible, fondée sur quelques approximations, une hypothèse osée mais plausible et, en fin de compte, sur le fait que $5/4$ est supérieur à 1 alors que $3/4$ ne l'est pas.

Cheminons le long de la trajectoire de 7 par exemple, d'abord pour la transformation $>$. Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie par $1/2$ s'il est pair, ou par environ $5/2$ s'il



Avec des nombres négatifs, la transformation de Collatz peut créer des cycles, ici de longueur 18.

est impair. Admettons que, lors de ce cheminement, on rencontre à peu près autant de pairs que d'impairs (c'est l'hypothèse osée !). Alors, si l'on marche jusqu'au 21 millionième terme par exemple, celui-ci devrait valoir environ : $7 \times (1/2)^{10500000} \times (5/2)^{10500000}$, soit $7 \times (5/4)^{10500000}$.

Or $5/4$ étant plus grand que 1, ses puissances successives grandissent sans limites. Le nombre ci-dessus compte d'ailleurs 1017556 chiffres avant la virgule, ce qui en fait une assez bonne approximation du vrai 21 millionième terme de la trajectoire de 7 avec ses 1016568 chiffres.

En revanche, le même raisonnement avec la transformation $\rightarrow$ ferait intervenir une grosse puissance de $3/4$. Celui-ci étant inférieur à 1, ses puissances successives tendent vers 0. C'est cela qui semble empêcher l'existence de trajectoires divergentes pour la transformation de Collatz.

Parmi les résultats partiels connus sur le problème $3n+1$, l'un affirme que si, contre toute attente, il existait un cycle autre que $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$, de longueur 3, alors il serait forcément gigantesque. Un théorème précise les choses : la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et environ 17000000000.

Comment prouver une telle affirmation ? D'abord, en montrant qu'il n'existe aucun cycle de longueur 5 pour la transformation de Collatz sur les entiers positifs. L'intérêt de cette preuve est d'être assez élémentaire, tout en contenant déjà l'idée essentielle pour la suite : la mise en évidence d'une équation très contraignante associée à un cycle. Pour la longueur 5, >

LA VARIANTE $5n+1$

Pour étudier les cycles et la divergence du problème $3n+1$, on peut s'intéresser à une variante : $5n+1$. En fait, pour accélérer un peu le cheminement dans les trajectoires, on remplace $5n+1$ par $(5n+1)/2$ plutôt que par $5n+1$. Les règles deviennent : si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on l'envoie sur $(5n+1)/2$. On utilisera le symbole $>$ pour dénoter cette nouvelle transformation. Voici par exemple la trajectoire de 1 : $1 > 3 > 8 > 4 > 2 > 1 \dots$ Un beau cycle de longueur 5. Voici un autre cycle, cette fois de longueur 7 : $13 > 33 > 83 > 208 > 104 > 52 > 26 > 13 \dots$ Partons maintenant de $n=7$. Là, un nouveau phénomène se manifeste. En effet, les 16 premiers termes de la trajectoire sont : $7 > 18 > 9 > 23 > 58 > 29 > 73 > 183 > 458 > 229 > 573 > 1433 > 3583 > 8958 > 4479 > 1198$. Cela grimpe vite. Allons un peu plus loin. Le 1000^e terme de cette trajectoire est : 6857007305798959806990948240228589098703203749. Un nombre à 46 chiffres ! On continue ? Jonathan Chappelon a bien voulu pousser le calcul de cette trajectoire jusqu'à son 21 millionième terme. Le nombre obtenu n'est même plus montrable : il a plus d'un million de chiffres (exactement 1016568) ! Il y a donc une très forte présomption que la trajectoire de 7 diverge ; mais personne à ce jour ne sait le démontrer. Pire : on pense que la plupart des trajectoires de cette transformation sont divergentes, mais personne ne sait prouver qu'il en existe au moins une qui le soit vraiment.