

sur $3 \times (-1) + 1 = -2$ par la transformation de Collatz. De même, on a $-2 \rightarrow -1$. On observe ainsi, sur les entiers négatifs, un cycle de longueur 2. Or là, surprise, ce n'est pas le seul ! On en connaît même deux autres :

La trajectoire de -5 est un cycle de longueur 5 : $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5 \dots$ Quant à -17 , il donne un cycle de longueur 18 (voir la figure ci-contre). Cette présence de trois cycles différents sur les entiers négatifs (on pense que ce sont les seuls) rend d'autant plus intéressante la prédiction selon laquelle il n'y aurait qu'un seul cycle sur les entiers positifs.

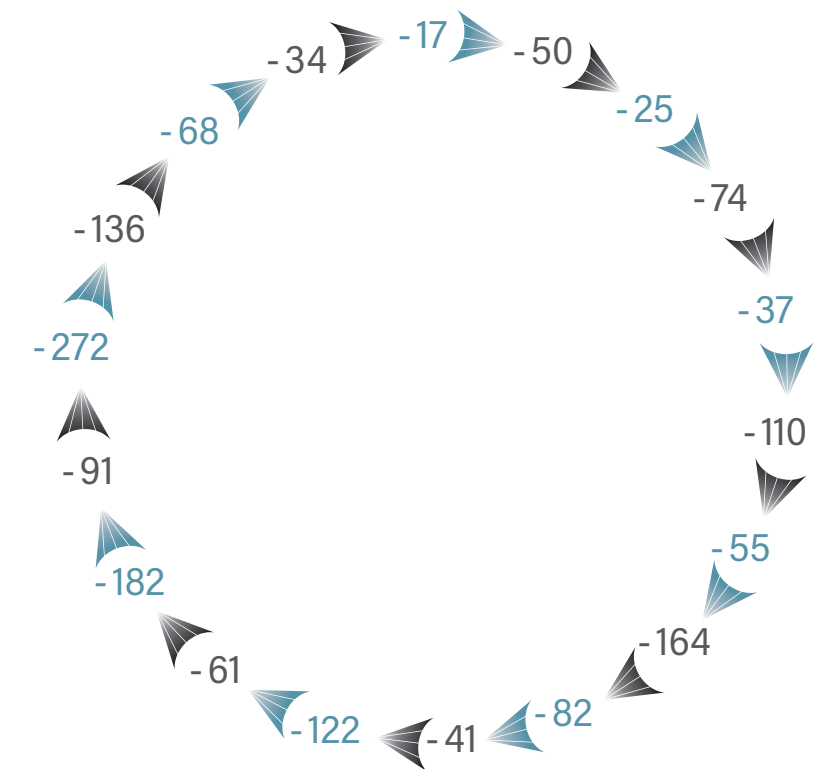
DIVERGENTE OU NON ?

Une variante de la transformation de Collatz, où l'on remplace $3n+1$ par $5n+1$, illustre simultanément les deux sous-problèmes (voir l'encadré ci-dessous). La différence est légère... et pourtant !

Pourquoi semble-t-il y avoir des trajectoires divergentes avec $(5n+1)/2$, mais pas avec $3n+1$ ni avec, ce qui revient au même, $(3n+1)/2$? Ce ne sont encore que des observations empiriques qui demandent à être formellement prouvées ; mais d'où peut bien venir cette différence de comportement ?

Voici une explication intuitive possible, fondée sur quelques approximations, une hypothèse osée mais plausible et, en fin de compte, sur le fait que $5/4$ est supérieur à 1 alors que $3/4$ ne l'est pas.

Cheminons le long de la trajectoire de 7 par exemple, d'abord pour la transformation $>$. Pour passer d'un terme au suivant, on le multiplie par $1/2$ s'il est pair, ou par environ $5/2$ s'il



Avec des nombres négatifs, la transformation de Collatz peut créer des cycles, ici de longueur 18.

est impair. Admettons que, lors de ce cheminement, on rencontre à peu près autant de pairs que d'impairs (c'est l'hypothèse osée !). Alors, si l'on marche jusqu'au 21 millionième terme par exemple, celui-ci devrait valoir environ : $7 \times (1/2)^{10500000} \times (5/2)^{10500000}$, soit $7 \times (5/4)^{10500000}$.

Or $5/4$ étant plus grand que 1, ses puissances successives grandissent sans limites. Le nombre ci-dessus compte d'ailleurs 1017556 chiffres avant la virgule, ce qui en fait une assez bonne approximation du vrai 21 millionième terme de la trajectoire de 7 avec ses 1016568 chiffres.

En revanche, le même raisonnement avec la transformation $\rightarrow$ ferait intervenir une grosse puissance de $3/4$. Celui-ci étant inférieur à 1, ses puissances successives tendent vers 0. C'est cela qui semble empêcher l'existence de trajectoires divergentes pour la transformation de Collatz.

Parmi les résultats partiels connus sur le problème $3n+1$, l'un affirme que si, contre toute attente, il existait un cycle autre que $(1 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$, de longueur 3, alors il serait forcément gigantesque. Un théorème précise les choses : la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et environ 17000000000.

Comment prouver une telle affirmation ? D'abord, en montrant qu'il n'existe aucun cycle de longueur 5 pour la transformation de Collatz sur les entiers positifs. L'intérêt de cette preuve est d'être assez élémentaire, tout en contenant déjà l'idée essentielle pour la suite : la mise en évidence d'une équation très contraignante associée à un cycle. Pour la longueur 5, >

LA VARIANTE $5n+1$

Pour étudier les cycles et la divergence du problème $3n+1$, on peut s'intéresser à une variante : $5n+1$. En fait, pour accélérer un peu le cheminement dans les trajectoires, on remplace $5n+1$ par $(5n+1)/2$ plutôt que par $5n+1$. Les règles deviennent : si n est pair, on le divise par 2 ; si n est impair, on l'envoie sur $(5n+1)/2$. On utilisera le symbole $>$ pour dénoter cette nouvelle transformation. Voici par exemple la trajectoire de 1 : $1 > 3 > 8 > 4 > 2 > 1 \dots$ Un beau cycle de longueur 5.

Voici un autre cycle, cette fois de longueur 7 :

$13 > 33 > 83 > 208 > 104 > 52 > 26 > 13 \dots$ Partons maintenant de $n = 7$.

Là, un nouveau phénomène se manifeste. En effet, les 16 premiers termes de la trajectoire sont :

$7 > 18 > 9 > 23 > 58 > 29 > 73 > 183 > 458 > 229 > 573 > 1433 >$

$3583 > 8958 > 4479 > 1198$. Cela grimpe vite.

Allons un peu plus loin. Le 1000^e terme de cette trajectoire est :

6857007305798959806990948240228589098703203749.

Un nombre à 46 chiffres ! On continue ? Jonathan Chappelon a bien voulu pousser le calcul de cette trajectoire jusqu'à son 21 millionième terme.

Le nombre obtenu n'est même plus montrable : il a plus d'un million de chiffres (exactement 1016568) ! Il y a donc une très forte présomption que la trajectoire de 7 diverge ; mais personne à ce jour ne sait le démontrer. Pire : on pense que la plupart des trajectoires de cette transformation sont divergentes, mais personne ne sait prouver qu'il en existe au moins une qui le soit vraiment.

➤ procédons par l'absurde, et supposons qu'un tel cycle existe. En le manipulant, on révélera une équation qui lui est associée et l'on constatera que cette équation est insoluble.

Remarquons que pour un hypothétique cycle de la transformation de Collatz sur les entiers positifs, le plus petit élément est forcément impair. En effet, notons C ce cycle et m son plus petit élément. Bien sûr, C est la trajectoire de m . Notons maintenant m' le nombre obtenu à partir de m par transformation de Collatz. Alors m' est lui aussi dans C , puisque C est la trajectoire de m , et il est plus grand que m , puisque m est minimal dans C . Or si m était pair, on aurait $m' = m/2$ qui est plus petit que m : cette contradiction montre bien que m est impair.

LE CAS DE LONGUEUR 5

L'hypothétique cycle de longueur 5 serait de la forme: $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$. Quitte à renommer les indices, on peut supposer que le plus petit est a_1 , forcément impair, nous l'avons vu, et différent de 1, puisque la trajectoire de 1 donne un cycle de longueur 3. En fin de compte, a_1 est supérieur ou égal à 3.

La transformation de Collatz appliquée aux éléments du cycle a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 donne la même liste décalée d'un cran (puisque c'est un cycle): a_2, a_3, a_4, a_5 et a_1 . Ce cycle est ainsi stable par transformation de Collatz. C'est évident, mais crucial pour la suite.

Pour savoir concrètement comment la transformation de Collatz agit sur $a_1 \dots a_5$, on doit savoir lesquels sont pairs et lesquels sont impairs. On sait déjà que a_1 est impair. Qu'en est-il des autres termes?

Puisque a_1 est impair, $a_2 = 3a_1 + 1$ est pair. Se pourrait-il que $a_3 = a_2/2 = (3a_1 + 1)/2$ soit pair? Si c'était le cas, on aurait alors $a_4 = a_3/2$. En enchaînant avec ce que l'on sait sur a_2 et a_1 , on obtiendrait: $a_4 = a_3/2 = a_2/4 = (3a_1 + 1)/4$. Le terme a_4 vaudrait donc environ les trois quarts de a_1 : il serait donc plus petit que a_1 (puisque celui-ci est supérieur ou égal à 3). C'est en contradiction avec la minimalité de a_1 . On conclut que a_3 est forcément impair.

En conséquence, $a_4 = 3a_3 + 1$ et il est donc pair. Et $a_5 = a_4/2$? Il est pair. En effet, a_5 doit être plus grand que a_1 . La seule possibilité est donc que a_5 soit pair et donc que $a_1 = a_5/2$. Car dans le cas contraire $(3a_5 + 1) = a_1$ serait plus grand que a_5 , ce qui est exclu. Nous connaissons maintenant l'exakte répartition des pairs et des impairs du cycle: a_1 et a_3 sont impairs; a_2, a_4 et a_5 sont pairs.

Résumons les formules obtenues en chemin, exprimant chaque terme du cycle en fonction du précédent: $a_1 = a_5/2$; $a_2 = 3a_1 + 1$; $a_3 = a_2/2$; $a_4 = 3a_3 + 1$; $a_5 = a_4/2$.

L'étape suivante consiste à prendre le produit P de ces 5 termes: $P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$. Avec les formules précédentes, on obtient: $P = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2)$.

À partir de ces deux expressions différentes de P , on parvient à l'équation annoncée. La voici dans une première version brute:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2).$$

Cette équation contient des informations intéressantes, mais pour les révéler, quelques manipulations algébriques s'imposent, au terme desquelles on obtient:

$$8 = (3 + 1/a_1)(3 + 1/a_3)$$

C'est l'équation annoncée, sous sa forme épurée, associée à n'importe quel hypothétique cycle de longueur 5. Nous pouvons maintenant conclure: a_1 et a_3 étant supposés positifs, l'équation ci-dessus est impossible à satisfaire, puisqu'à droite on obtient un nombre supérieur à 9, alors qu'à gauche on n'a que 8. On vient de prouver que la transformation de Collatz n'admet aucun cycle de longueur 5 sur les entiers positifs.

Une bizarrerie reste à comprendre: le développement ci-dessus reste valable sur les entiers négatifs, à condition de remplacer les

**La conjecture
a occupé tant
de mathématiciens
américains que
certains y ont vu...
une conspiration
soviétique**

comparaisons de grandeur par des comparaisons de grandeur *en valeur absolue*. Comment se fait-il que, malgré cela, il existe bien un cycle de longueur 5 dans les entiers négatifs?

La solution de cette apparente contradiction tient à l'ultime argument de la preuve: bien qu'insoluble dans les entiers positifs, l'équation associée admet quand même des solutions dans les entiers négatifs! En effet, posons $a_1 = -5$ et $a_3 = -7$. Un calcul montre qu'on a bien $8 = (3 + 1/(-5))(3 + 1/(-7))$. Et