

- procédons par l'absurde, et supposons qu'un tel cycle existe. En le manipulant, on révélera une équation qui lui est associée et l'on constatera que cette équation est insoluble.

Remarquons que pour un hypothétique cycle de la transformation de Collatz sur les entiers positifs, le plus petit élément est forcément impair. En effet, notons C ce cycle et m son plus petit élément. Bien sûr, C est la trajectoire de m . Notons maintenant m' le nombre obtenu à partir de m par transformation de Collatz. Alors m' est lui aussi dans C , puisque C est la trajectoire de m , et il est plus grand que m , puisque m est minimal dans C . Or si m était pair, on aurait $m' = m/2$ qui est plus petit que m : cette contradiction montre bien que m est impair.

LE CAS DE LONGUEUR 5

L'hypothétique cycle de longueur 5 serait de la forme: $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$. Quitte à renommer les indices, on peut supposer que le plus petit est a_1 , forcément impair, nous l'avons vu, et différent de 1, puisque la trajectoire de 1 donne un cycle de longueur 3. En fin de compte, a_1 est supérieur ou égal à 3.

La transformation de Collatz appliquée aux éléments du cycle a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 donne la même liste décalée d'un cran (puisque c'est un cycle): a_2, a_3, a_4, a_5 et a_1 . Ce cycle est ainsi stable par transformation de Collatz. C'est évident, mais crucial pour la suite.

Pour savoir concrètement comment la transformation de Collatz agit sur $a_1 \dots a_5$, on doit savoir lesquels sont pairs et lesquels sont impairs. On sait déjà que a_1 est impair. Qu'en est-il des autres termes?

Puisque a_1 est impair, $a_2 = 3a_1 + 1$ est pair. Se pourrait-il que $a_3 = a_2/2 = (3a_1 + 1)/2$ soit pair? Si c'était le cas, on aurait alors $a_4 = a_3/2$. En enchaînant avec ce que l'on sait sur a_2 et a_1 , on obtiendrait: $a_4 = a_3/2 = a_2/4 = (3a_1 + 1)/4$. Le terme a_4 vaudrait donc environ les trois quarts de a_1 : il serait donc plus petit que a_1 (puisque celui-ci est supérieur ou égal à 3). C'est en contradiction avec la minimalité de a_1 . On conclut que a_3 est forcément impair.

En conséquence, $a_4 = 3a_3 + 1$ et il est donc pair. Et $a_5 = a_4/2$? Il est pair. En effet, a_5 doit être plus grand que a_1 . La seule possibilité est donc que a_5 soit pair et donc que $a_1 = a_5/2$. Car dans le cas contraire $(3a_5 + 1) = a_1$ serait plus grand que a_5 , ce qui est exclu. Nous connaissons maintenant l'exakte répartition des pairs et des impairs du cycle: a_1 et a_3 sont impairs; a_2, a_4 et a_5 sont pairs.

Résumons les formules obtenues en chemin, exprimant chaque terme du cycle en fonction du précédent: $a_1 = a_5/2$; $a_2 = 3a_1 + 1$; $a_3 = a_2/2$; $a_4 = 3a_3 + 1$; $a_5 = a_4/2$.

L'étape suivante consiste à prendre le produit P de ces 5 termes: $P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$. Avec les formules précédentes, on obtient: $P = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2)$.

À partir de ces deux expressions différentes de P , on parvient à l'équation annoncée. La voici dans une première version brute:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2).$$

Cette équation contient des informations intéressantes, mais pour les révéler, quelques manipulations algébriques s'imposent, au terme desquelles on obtient:

$$8 = (3 + 1/a_1)(3 + 1/a_3)$$

C'est l'équation annoncée, sous sa forme épurée, associée à n'importe quel hypothétique cycle de longueur 5. Nous pouvons maintenant conclure: a_1 et a_3 étant supposés positifs, l'équation ci-dessus est impossible à satisfaire, puisqu'à droite on obtient un nombre supérieur à 9, alors qu'à gauche on n'a que 8. On vient de prouver que la transformation de Collatz n'admet aucun cycle de longueur 5 sur les entiers positifs.

Une bizarrerie reste à comprendre: le développement ci-dessus reste valable sur les entiers négatifs, à condition de remplacer les

**La conjecture
a occupé tant
de mathématiciens
américains que
certains y ont vu...
une conspiration
soviétique**

comparaisons de grandeur par des comparaisons de grandeur *en valeur absolue*. Comment se fait-il que, malgré cela, il existe bien un cycle de longueur 5 dans les entiers négatifs?

La solution de cette apparente contradiction tient à l'ultime argument de la preuve: bien qu'insoluble dans les entiers positifs, l'équation associée admet quand même des solutions dans les entiers négatifs! En effet, posons $a_1 = -5$ et $a_3 = -7$. Un calcul montre qu'on a bien $8 = (3 + 1/(-5))(3 + 1/(-7))$. Et