

- procédons par l'absurde, et supposons qu'un tel cycle existe. En le manipulant, on révélera une équation qui lui est associée et l'on constatera que cette équation est insoluble.

Remarquons que pour un hypothétique cycle de la transformation de Collatz sur les entiers positifs, le plus petit élément est forcément impair. En effet, notons C ce cycle et m son plus petit élément. Bien sûr, C est la trajectoire de m . Notons maintenant m' le nombre obtenu à partir de m par transformation de Collatz. Alors m' est lui aussi dans C , puisque C est la trajectoire de m , et il est plus grand que m , puisque m est minimal dans C . Or si m était pair, on aurait $m' = m/2$ qui est plus petit que m : cette contradiction montre bien que m est impair.

LE CAS DE LONGUEUR 5

L'hypothétique cycle de longueur 5 serait de la forme: $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow a_5 \rightarrow a_1$. Quitte à renommer les indices, on peut supposer que le plus petit est a_1 , forcément impair, nous l'avons vu, et différent de 1, puisque la trajectoire de 1 donne un cycle de longueur 3. En fin de compte, a_1 est supérieur ou égal à 3.

La transformation de Collatz appliquée aux éléments du cycle a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 donne la même liste décalée d'un cran (puisque c'est un cycle): a_2, a_3, a_4, a_5 et a_1 . Ce cycle est ainsi stable par transformation de Collatz. C'est évident, mais crucial pour la suite.

Pour savoir concrètement comment la transformation de Collatz agit sur $a_1 \dots a_5$, on doit savoir lesquels sont pairs et lesquels sont impairs. On sait déjà que a_1 est impair. Qu'en est-il des autres termes?

Puisque a_1 est impair, $a_2 = 3a_1 + 1$ est pair. Se pourrait-il que $a_3 = a_2/2 = (3a_1 + 1)/2$ soit pair? Si c'était le cas, on aurait alors $a_4 = a_3/2$. En enchaînant avec ce que l'on sait sur a_2 et a_1 , on obtiendrait: $a_4 = a_3/2 = a_2/4 = (3a_1 + 1)/4$. Le terme a_4 vaudrait donc environ les trois quarts de a_1 : il serait donc plus petit que a_1 (puisque celui-ci est supérieur ou égal à 3). C'est en contradiction avec la minimalité de a_1 . On conclut que a_3 est forcément impair.

En conséquence, $a_4 = 3a_3 + 1$ et il est donc pair. Et $a_5 = a_4/2$? Il est pair. En effet, a_5 doit être plus grand que a_1 . La seule possibilité est donc que a_5 soit pair et donc que $a_1 = a_5/2$. Car dans le cas contraire $(3a_5 + 1) = a_1$ serait plus grand que a_5 , ce qui est exclu. Nous connaissons maintenant l'exakte répartition des pairs et des impairs du cycle: a_1 et a_3 sont impairs; a_2, a_4 et a_5 sont pairs.

Résumons les formules obtenues en chemin, exprimant chaque terme du cycle en fonction du précédent: $a_1 = a_5/2$; $a_2 = 3a_1 + 1$; $a_3 = a_2/2$; $a_4 = 3a_3 + 1$; $a_5 = a_4/2$.

L'étape suivante consiste à prendre le produit P de ces 5 termes: $P = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5$. Avec les formules précédentes, on obtient: $P = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2)$.

À partir de ces deux expressions différentes de P , on parvient à l'équation annoncée. La voici dans une première version brute:

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = (a_5/2) \times (3a_1 + 1) \times (a_2/2) \times (3a_3 + 1) \times (a_4/2).$$

Cette équation contient des informations intéressantes, mais pour les révéler, quelques manipulations algébriques s'imposent, au terme desquelles on obtient:

$$8 = (3 + 1/a_1)(3 + 1/a_3)$$

C'est l'équation annoncée, sous sa forme épurée, associée à n'importe quel hypothétique cycle de longueur 5. Nous pouvons maintenant conclure: a_1 et a_3 étant supposés positifs, l'équation ci-dessus est impossible à satisfaire, puisqu'à droite on obtient un nombre supérieur à 9, alors qu'à gauche on n'a que 8. On vient de prouver que la transformation de Collatz n'admet aucun cycle de longueur 5 sur les entiers positifs.

Une bizarrerie reste à comprendre: le développement ci-dessus reste valable sur les entiers négatifs, à condition de remplacer les

La conjecture a occupé tant de mathématiciens américains que certains y ont vu... une conspiration soviétique

comparaisons de grandeur par des comparaisons de grandeur *en valeur absolue*. Comment se fait-il que, malgré cela, il existe bien un cycle de longueur 5 dans les entiers négatifs?

La solution de cette apparente contradiction tient à l'ultime argument de la preuve: bien qu'insoluble dans les entiers positifs, l'équation associée admet quand même des solutions dans les entiers négatifs! En effet, posons $a_1 = -5$ et $a_3 = -7$. Un calcul montre qu'on a bien $8 = (3 + 1/(-5))(3 + 1/(-7))$. Et

l'on retrouve bien le cycle que nous avons vu auparavant: $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5$.

À part les trajectoires de -1 et de -5 , on connaît encore un autre cycle pour la transformation de Collatz sur les entiers négatifs. C'est la trajectoire de -17 , qui est de longueur 18.

Revenons aux entiers positifs pour lesquels on ne connaît de cycle que le trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Nous sommes désormais armés pour le théorème: la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et 17 000 000 000, et plus précisément 17 026 679 261!

DE 5 À 17 026 679 261...

Notre preuve d'exclusion de la longueur 5 pour les cycles de Collatz dans les entiers positifs repose sur deux piliers: la stabilité du cycle présumé sous l'action de la transformation de Collatz; une équation très contraignante associée à ce cycle.

Pour exclure de plus grandes longueurs de cycles, le premier ingrédient se généralise facilement. En revanche, le second avait découlé d'une description précise de la répartition des pairs et des impairs dans le cycle. Or il est illusoire d'espérer obtenir une telle description en longueur supérieure, pour des raisons d'explosion combinatoire. Comment surmonter cet obstacle? Grâce à un petit saut dans l'abstraction, en acceptant d'introduire une notation spécifique distinguant les pairs des impairs dans le cycle présumé.

Pour un hypothétique cycle de Collatz C ($a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots a_N \rightarrow a_1$) dans les entiers positifs de longueur N , on notera p le nombre d'éléments pairs et q le nombre de ses éléments impairs. On ignore tout *a priori* de p et q , si ce n'est qu'ils satisfont l'égalité $p + q = N$. Poursuivant sur notre lancée, on notera $b_1 \dots b_p$ la liste des éléments pairs de C , et $c_1 \dots c_q$ celle de ses éléments impairs. Enfin, m sera le plus petit élément de C . Forcément impair, ce nombre jouera un rôle particulier. Que deviennent dans ce cadre plus général, les deux piliers de la preuve?

Le premier est la stabilité. Si l'on applique la transformation de Collatz à la liste des éléments du cycle C , on retombe sur la liste d'origine, juste décalée cycliquement d'un cran. Le cycle C est donc bien stable par transformation de Collatz.

Le second ingrédient est l'équation associée au cycle C . On ignore comment se répartissent les termes pairs $b_1 \dots b_p$ et impairs $c_1 \dots c_q$ dans C . Mais, en les agrégeant, la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$ obtenue n'est rien d'autre qu'un réarrangement de la liste des éléments de C . Or, celle-ci est globalement stable par transformation de Collatz. De plus, on sait exactement ce que donne cette transformation sur chacun des termes b_i et c_j , puisqu'on connaît leur parité! Faisons-le. En appliquant la transformation de Collatz à la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$, on obtient $b_1/2 \dots b_p/2, 3c_1 + 1 \dots 3c_q + 1$.

Ces deux listes contiennent exactement les mêmes éléments à l'ordre près, ceux de C .

Pour l'équation, comme pour le cycle de longueur 5, prenons le produit P des termes de C . En utilisant chacune des deux listes ci-dessus représentant C , on obtient à nouveau deux expressions de P : $P = b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q$ et $P = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$. De cette double expression, on déduit l'équation associée à C , dans sa version brute: $b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$.

Après quelques manipulations algébriques, l'équation devient, sous une forme épurée :

$$2^p = (3 + 1/c_1) (3 + 1/c_2) \dots (3 + 1/c_q).$$

Pour $N = 3$, on a le cycle trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). On voit que $p = 2$ et $q = 1$, la liste des impairs se réduisant à $c_1 = 1$. On vérifie que $2^2 = (3 + 1/1)$.

Pour $N = 5$, en supposant que le minimum du cycle est a_1 , on avait trouvé trois pairs (a_2, a_4 et a_5) et deux impairs (a_1 et a_3), donnant donc $p = 3$ et $q = 2$. On retrouve l'équation $8 = (3 + 1/a_1) (3 + 1/a_3)$ avec laquelle on avait exclu les cycles de Collatz de longueur 5 dans les entiers positifs.

L'équation en question fournit un encadrement de 2^p très contraignant. Avec $c_1 \dots c_q$ les éléments impairs de C et m son minimum, on a donc $c_i \geq m$, pour tout indice i entre 1 et q . En inversant, puis en ajoutant 3, on obtient $3 < 3 + 1/c_i \leq 3 + 1/m$ pour tout i , sachant que les c_i sont strictement positifs. En prenant le produit de ces q termes, on obtient les inégalités suivantes: $3^q < (3 + 1/c_1) \dots (3 + 1/c_q) \leq (3 + 1/m)^q$.

Par l'équation associée au cycle, le terme du milieu est égal à 2^p . On obtient donc l'encadrement

$$3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$$

pour un cycle de Collatz C dans les entiers positifs, avec p pairs, q impairs, et de minimum m .

Voici pourquoi on peut tirer des informations de cet encadrement: plus le minimum m de C est grand, plus son inverse $1/m$ est petit, et plus il sera difficile de trouver une puissance de 2 coincée entre une puissance de 3 et une autre de $3 + 1/m$ avec un exposant commun q . Cela suffit déjà pour exclure la longueur 18.

... EN PASSANT PAR 18

La trajectoire de -17 est un cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers négatifs. Au contraire, il n'existe pas de cycle de cette longueur dans les entiers positifs. Montrons-le. Les symboles p , q et m sont compris relativement à cet hypothétique cycle C . En particulier, le minimum m de C est strictement plus grand que 1, puisque la trajectoire de 1 est un cycle de longueur 3 et non pas 18. Comme $p + q = 18$, on a $p = 18 - q$, et l'encadrement de 2^p devient: $3^q < 2^{18-q} \leq (3 + 1/m)^q$.

>