

l'on retrouve bien le cycle que nous avons vu auparavant: $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5$.

À part les trajectoires de -1 et de -5 , on connaît encore un autre cycle pour la transformation de Collatz sur les entiers négatifs. C'est la trajectoire de -17 , qui est de longueur 18.

Revenons aux entiers positifs pour lesquels on ne connaît de cycle que le trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Nous sommes désormais armés pour le théorème: la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et 17 000 000 000, et plus précisément 17 026 679 261!

DE 5 À 17 026 679 261...

Notre preuve d'exclusion de la longueur 5 pour les cycles de Collatz dans les entiers positifs repose sur deux piliers: la stabilité du cycle présumé sous l'action de la transformation de Collatz; une équation très contraignante associée à ce cycle.

Pour exclure de plus grandes longueurs de cycles, le premier ingrédient se généralise facilement. En revanche, le second avait découlé d'une description précise de la répartition des pairs et des impairs dans le cycle. Or il est illusoire d'espérer obtenir une telle description en longueur supérieure, pour des raisons d'explosion combinatoire. Comment surmonter cet obstacle? Grâce à un petit saut dans l'abstraction, en acceptant d'introduire une notation spécifique distinguant les pairs des impairs dans le cycle présumé.

Pour un hypothétique cycle de Collatz C ($a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots a_N \rightarrow a_1$) dans les entiers positifs de longueur N , on notera p le nombre d'éléments pairs et q le nombre de ses éléments impairs. On ignore tout *a priori* de p et q , si ce n'est qu'ils satisfont l'égalité $p + q = N$. Poursuivant sur notre lancée, on notera $b_1 \dots b_p$ la liste des éléments pairs de C , et $c_1 \dots c_q$ celle de ses éléments impairs. Enfin, m sera le plus petit élément de C . Forcément impair, ce nombre jouera un rôle particulier. Que deviennent dans ce cadre plus général, les deux piliers de la preuve?

Le premier est la stabilité. Si l'on applique la transformation de Collatz à la liste des éléments du cycle C , on retombe sur la liste d'origine, juste décalée cycliquement d'un cran. Le cycle C est donc bien stable par transformation de Collatz.

Le second ingrédient est l'équation associée au cycle C . On ignore comment se répartissent les termes pairs $b_1 \dots b_p$ et impairs $c_1 \dots c_q$ dans C . Mais, en les agrégeant, la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$ obtenue n'est rien d'autre qu'un réarrangement de la liste des éléments de C . Or, celle-ci est globalement stable par transformation de Collatz. De plus, on sait exactement ce que donne cette transformation sur chacun des termes b_i et c_j , puisqu'on connaît leur parité! Faisons-le. En appliquant la transformation de Collatz à la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$, on obtient $b_1/2 \dots b_p/2, 3c_1 + 1 \dots 3c_q + 1$.

Ces deux listes contiennent exactement les mêmes éléments à l'ordre près, ceux de C .

Pour l'équation, comme pour le cycle de longueur 5, prenons le produit P des termes de C . En utilisant chacune des deux listes ci-dessus représentant C , on obtient à nouveau deux expressions de P : $P = b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q$ et $P = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$. De cette double expression, on déduit l'équation associée à C , dans sa version brute: $b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$.

Après quelques manipulations algébriques, l'équation devient, sous une forme épurée :

$$2^p = (3 + 1/c_1) (3 + 1/c_2) \dots (3 + 1/c_q).$$

Pour $N = 3$, on a le cycle trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). On voit que $p = 2$ et $q = 1$, la liste des impairs se réduisant à $c_1 = 1$. On vérifie que $2^2 = (3 + 1/1)$.

Pour $N = 5$, en supposant que le minimum du cycle est a_1 , on avait trouvé trois pairs (a_2, a_4 et a_5) et deux impairs (a_1 et a_3), donnant donc $p = 3$ et $q = 2$. On retrouve l'équation $8 = (3 + 1/a_1) (3 + 1/a_3)$ avec laquelle on avait exclu les cycles de Collatz de longueur 5 dans les entiers positifs.

L'équation en question fournit un encadrement de 2^p très contraignant. Avec $c_1 \dots c_q$ les éléments impairs de C et m son minimum, on a donc $c_i \geq m$, pour tout indice i entre 1 et q . En inversant, puis en ajoutant 3, on obtient $3 < 3 + 1/c_i \leq 3 + 1/m$ pour tout i , sachant que les c_i sont strictement positifs. En prenant le produit de ces q termes, on obtient les inégalités suivantes: $3^q < (3 + 1/c_1) \dots (3 + 1/c_q) \leq (3 + 1/m)^q$.

Par l'équation associée au cycle, le terme du milieu est égal à 2^p . On obtient donc l'encadrement

$$3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$$

pour un cycle de Collatz C dans les entiers positifs, avec p pairs, q impairs, et de minimum m .

Voici pourquoi on peut tirer des informations de cet encadrement: plus le minimum m de C est grand, plus son inverse $1/m$ est petit, et plus il sera difficile de trouver une puissance de 2 coincée entre une puissance de 3 et une autre de $3 + 1/m$ avec un exposant commun q . Cela suffit déjà pour exclure la longueur 18.

... EN PASSANT PAR 18

La trajectoire de -17 est un cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers négatifs. Au contraire, il n'existe pas de cycle de cette longueur dans les entiers positifs. Montrons-le. Les symboles p , q et m sont compris relativement à cet hypothétique cycle C . En particulier, le minimum m de C est strictement plus grand que 1, puisque la trajectoire de 1 est un cycle de longueur 3 et non pas 18. Comme $p + q = 18$, on a $p = 18 - q$, et l'encadrement de 2^p devient: $3^q < 2^{18-q} \leq (3 + 1/m)^q$.

>