

l'on retrouve bien le cycle que nous avons vu auparavant: $-5 \rightarrow -14 \rightarrow -7 \rightarrow -20 \rightarrow -10 \rightarrow -5$.

À part les trajectoires de -1 et de -5 , on connaît encore un autre cycle pour la transformation de Collatz sur les entiers négatifs. C'est la trajectoire de -17 , qui est de longueur 18.

Revenons aux entiers positifs pour lesquels on ne connaît de cycle que le trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). Nous sommes désormais armés pour le théorème: la transformation de Collatz n'admet, sur les entiers positifs, aucun cycle de longueur comprise entre 4 et 17 000 000 000, et plus précisément 17 026 679 261!

DE 5 À 17 026 679 261...

Notre preuve d'exclusion de la longueur 5 pour les cycles de Collatz dans les entiers positifs repose sur deux piliers: la stabilité du cycle présumé sous l'action de la transformation de Collatz; une équation très contraignante associée à ce cycle.

Pour exclure de plus grandes longueurs de cycles, le premier ingrédient se généralise facilement. En revanche, le second avait découlé d'une description précise de la répartition des pairs et des impairs dans le cycle. Or il est illusoire d'espérer obtenir une telle description en longueur supérieure, pour des raisons d'explosion combinatoire. Comment surmonter cet obstacle? Grâce à un petit saut dans l'abstraction, en acceptant d'introduire une notation spécifique distinguant les pairs des impairs dans le cycle présumé.

Pour un hypothétique cycle de Collatz C ($a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \dots a_N \rightarrow a_1$) dans les entiers positifs de longueur N , on notera p le nombre d'éléments pairs et q le nombre de ses éléments impairs. On ignore tout *a priori* de p et q , si ce n'est qu'ils satisfont l'égalité $p + q = N$. Poursuivant sur notre lancée, on notera $b_1 \dots b_p$ la liste des éléments pairs de C , et $c_1 \dots c_q$ celle de ses éléments impairs. Enfin, m sera le plus petit élément de C . Forcément impair, ce nombre jouera un rôle particulier. Que deviennent dans ce cadre plus général, les deux piliers de la preuve?

Le premier est la stabilité. Si l'on applique la transformation de Collatz à la liste des éléments du cycle C , on retombe sur la liste d'origine, juste décalée cycliquement d'un cran. Le cycle C est donc bien stable par transformation de Collatz.

Le second ingrédient est l'équation associée au cycle C . On ignore comment se répartissent les termes pairs $b_1 \dots b_p$ et impairs $c_1 \dots c_q$ dans C . Mais, en les agrégeant, la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$ obtenue n'est rien d'autre qu'un réarrangement de la liste des éléments de C . Or, celle-ci est globalement stable par transformation de Collatz. De plus, on sait exactement ce que donne cette transformation sur chacun des termes b_i et c_j , puisqu'on connaît leur parité! Faisons-le. En appliquant la transformation de Collatz à la liste $b_1 \dots b_p, c_1 \dots c_q$, on obtient $b_1/2 \dots b_p/2, 3c_1 + 1 \dots 3c_q + 1$.

Ces deux listes contiennent exactement les mêmes éléments à l'ordre près, ceux de C .

Pour l'équation, comme pour le cycle de longueur 5, prenons le produit P des termes de C . En utilisant chacune des deux listes ci-dessus représentant C , on obtient à nouveau deux expressions de P : $P = b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q$ et $P = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$. De cette double expression, on déduit l'équation associée à C , dans sa version brute: $b_1 \times b_2 \dots b_p \times c_1 \times c_2 \dots c_q = b_1/2 \times b_2/2 \dots b_p/2 \times (3c_1 + 1) \times (3c_2 + 1) \dots (3c_q + 1)$.

Après quelques manipulations algébriques, l'équation devient, sous une forme épurée :

$$2^p = (3 + 1/c_1) (3 + 1/c_2) \dots (3 + 1/c_q).$$

Pour $N = 3$, on a le cycle trivial ($1 \rightarrow 4 \rightarrow 2$). On voit que $p = 2$ et $q = 1$, la liste des impairs se réduisant à $c_1 = 1$. On vérifie que $2^2 = (3 + 1/1)$.

Pour $N = 5$, en supposant que le minimum du cycle est a_1 , on avait trouvé trois pairs (a_2, a_4 et a_5) et deux impairs (a_1 et a_3), donnant donc $p = 3$ et $q = 2$. On retrouve l'équation $8 = (3 + 1/a_1) (3 + 1/a_3)$ avec laquelle on avait exclu les cycles de Collatz de longueur 5 dans les entiers positifs.

L'équation en question fournit un encadrement de 2^p très contraignant. Avec $c_1 \dots c_q$ les éléments impairs de C et m son minimum, on a donc $c_i \geq m$, pour tout indice i entre 1 et q . En inversant, puis en ajoutant 3, on obtient $3 < 3 + 1/c_i \leq 3 + 1/m$ pour tout i , sachant que les c_i sont strictement positifs. En prenant le produit de ces q termes, on obtient les inégalités suivantes: $3^q < (3 + 1/c_1) \dots (3 + 1/c_q) \leq (3 + 1/m)^q$.

Par l'équation associée au cycle, le terme du milieu est égal à 2^p . On obtient donc l'encadrement

$$3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$$

pour un cycle de Collatz C dans les entiers positifs, avec p pairs, q impairs, et de minimum m .

Voici pourquoi on peut tirer des informations de cet encadrement: plus le minimum m de C est grand, plus son inverse $1/m$ est petit, et plus il sera difficile de trouver une puissance de 2 coincée entre une puissance de 3 et une autre de $3 + 1/m$ avec un exposant commun q . Cela suffit déjà pour exclure la longueur 18.

... EN PASSANT PAR 18

La trajectoire de -17 est un cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers négatifs. Au contraire, il n'existe pas de cycle de cette longueur dans les entiers positifs. Montrons-le. Les symboles p , q et m sont compris relativement à cet hypothétique cycle C . En particulier, le minimum m de C est strictement plus grand que 1, puisque la trajectoire de 1 est un cycle de longueur 3 et non pas 18. Comme $p + q = 18$, on a $p = 18 - q$, et l'encadrement de 2^p devient: $3^q < 2^{18-q} \leq (3 + 1/m)^q$.

► Puisque $m > 1$, $(3 + 1/m)$ est donc inférieur à 4. Le terme de droite est donc dominé par 4^q . On obtient ainsi les inégalités strictes $3^q < 2^{18-q} \leq 4^q$. Quelles valeurs de q satisfont ces deux inégalités?

Si q est trop grand, alors 3^q dépassera 2^{18-q} et q ne conviendra pas. De même, si q est trop petit, alors $18-q$ sera trop grand et 2^{18-q} dépassera 4^q . q ne conviendra donc pas non plus. Concrétisons ces observations avec une calculatrice. On trouve $3^7 = 2187$ et $2^{11} = 2048$, donnant l'inégalité $3^7 > 2^{11}$. Donc les valeurs de q supérieures ou égales à 7 sont interdites.

Dans l'autre sens, on a $2^{13} > 4^5$, puisque $4^5 = 2^{10}$. Les valeurs de q inférieures ou égales à 5 sont donc interdites également. Reste une unique valeur permise, à savoir $q=6$, ce qui donne $18-q=12$. Or on a $2^{12} = 4^6$, en contradiction avec l'inégalité stricte $2^{18-q} < 4^q$ requise plus haut. Conclusion: il n'existe aucun cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers positifs.

Pour aller au-delà de l'exclusion de la longueur 18, nous avons besoin d'outils afin de mieux exploiter la force de l'encadrement de 2^p obtenu plus haut. L'idée est de faire «descendre» les exposants p et q afin de les manipuler plus aisément. Pour ce faire, l'outil tout indiqué est le logarithme. De fait: $\log(x^r) = r \log(x)$.

Une propriété du logarithme qui nous intéresse ici est sa continuité: si x et y sont très proches, alors $\log(x)$ et $\log(y)$ le sont aussi.

L'ENCADREMENT DE p/q

On va déduire un encadrement de p/q à partir de celui de 2^p obtenu précédemment: $3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$. En appliquant le logarithme, qui respecte l'ordre, on obtient: $\log(3^q) < \log(2^p) \leq \log((3 + 1/m)^q)$. En «descendant» les exposants et après quelques manipulations, on parvient à l'encadrement:

$$\frac{\log(3)}{\log(2)} < \frac{p}{q} \leq \frac{\log(3+1/m)}{\log(2)}$$

Encore une fois, plus m est grand, plus $1/m$ est petit et, par continuité, plus $\log(3+1/m)$ est proche de $\log(3)$. Autrement dit, le rapport p/q se retrouve coincé entre deux nombres d'autant plus proches que m est grand. Ces contraintes vont se révéler très fortes.

Pour un hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs, de minimum m , on a forcément $m > 5 \times 10^{18}$. Ce nombre découle de la vérification du problème $3n+1$ sur ordinateur par Tomás Oliveira e Silva jusqu'à cette borne: pour tout entier n inférieur à 5×10^{18} , sa

trajectoire finit par atteindre 1. Celle-ci ne peut donc contenir un cycle autre que le cycle trivial de longueur 3. On en déduit alors que: $\log(3)/\log(2) < p/q \leq \log(3 + 2 \times 10^{-19})/\log(2)$.

En effet, notant toujours m le minimum de C , on a $m > 5 \times 10^{18}$. En prenant les inverses, l'ordre s'inverse, ce qui donne $1/m < 1/(5 \times 10^{18})$, ou encore, puisque $1/5 = 0,2 = 2 \times 10^{-1}$, $1/m < 2 \times 10^{-19}$. Reste, de chaque côté, à ajouter 3, à prendre le logarithme et à diviser par $\log(2)$ pour parvenir à: $\log(3+1/m)/\log(2) < \log(3+2 \times 10^{-19})/\log(2)$. Combinée à l'encadrement de p/q obtenu plus haut, on obtient celui annoncé.

Concrètement, le rapport p/q est compris entre 1,5849625007211561814537389 et 1,5849625007211561815499186. La différence ne se manifeste qu'à partir de la 19^e décimale! On en déduit que si C est un cycle de Collatz non trivial dans les entiers positifs, avec p termes pairs et q impairs, alors p/q appartient à l'intervalle: $I =]1,58496250072115618145, 1,58496250072115618155]$.

UN INTERVALLE DE PLUS EN PLUS RÉDUIT

En quoi le fait de savoir que p/q est contraint d'habiter dans un intervalle aussi petit peut-il nous être utile? Assez curieusement parce que toute fraction appartenant à I est tenue d'avoir ses numérateur et dénominateur très grands. Concrètement, on peut montrer que pour tout rationnel s/t de I , avec s et t entiers positifs, on a forcément $s \geq 10439860591$ et $t \geq 6586818670$.

En particulier, ces seuils s'appliqueront à p et q respectivement, puisque p/q appartient à I . Il en découle aussitôt que la longueur de notre présumé cycle C doit dépasser la somme de ces seuils, à savoir 17026679261!

Ainsi, tout hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs doit

contenir au moins 17 milliards d'éléments, s'il existe. Cela ne répond pas à notre question initiale. Mais on peut s'en satisfaire, en attendant mieux.

Et un mieux viendra peut-être bientôt. En effet, cette borne de 17 milliards repose sur la vérification

actuelle du problème $3n+1$ jusqu'à 5×10^{18} . Avec du nouveau matériel informatique, on espère pouvoir vérifier la conjecture jusqu'à $2,17 \times 10^{20}$, dans quelques années sans doute (sauf si un cycle est découvert!). La borne inférieure sur les longueurs de cycles sautera alors de 17 milliards à... 186 milliards, d'un seul coup (c'est un saut d'un facteur 10)! Si vous êtes impatients, sachez que nous venons de passer en revue tous les ingrédients théoriques et numériques suffisants pour s'en convaincre. Vous êtes prêts pour le vérifier? Alors, à vos calculatrices! ■

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS

Images des Mathématiques :

<http://images.math.cnrs.fr/>

Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

J. LAGARIAS, *The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem*, *American Mathematical Society*, 2010.

S. ELIAHOU, *The $3x+1$ problem : new lower bounds on nontrivial cycle lengths*, *Discrete Mathematics*, vol. 118, pp. 45-56, 1993.