

> Puisque $m > 1$, $(3 + 1/m)$ est donc inférieur à 4. Le terme de droite est donc dominé par 4^q . On obtient ainsi les inégalités strictes $3^q < 2^{18-q} \leq 4^q$. Quelles valeurs de q satisfont ces deux inégalités?

Si q est trop grand, alors 3^q dépassera 2^{18-q} et q ne conviendra pas. De même, si q est trop petit, alors $18-q$ sera trop grand et 2^{18-q} dépassera 4^q . q ne conviendra donc pas non plus. Concrétisons ces observations avec une calculatrice. On trouve $3^7 = 2187$ et $2^{11} = 2048$, donnant l'inégalité $3^7 > 2^{11}$. Donc les valeurs de q supérieures ou égales à 7 sont interdites.

Dans l'autre sens, on a $2^{13} > 4^5$, puisque $4^5 = 2^{10}$. Les valeurs de q inférieures ou égales à 5 sont donc interdites également. Reste une unique valeur permise, à savoir $q=6$, ce qui donne $18-q=12$. Or on a $2^{12} = 4^6$, en contradiction avec l'inégalité stricte $2^{18-q} < 4^q$ requise plus haut. Conclusion: il n'existe aucun cycle de Collatz de longueur 18 dans les entiers positifs.

Pour aller au-delà de l'exclusion de la longueur 18, nous avons besoin d'outils afin de mieux exploiter la force de l'encadrement de 2^p obtenu plus haut. L'idée est de faire «descendre» les exposants p et q afin de les manipuler plus aisément. Pour ce faire, l'outil tout indiqué est le logarithme. De fait: $\log(x^r) = r \log(x)$.

Une propriété du logarithme qui nous intéresse ici est sa continuité: si x et y sont très proches, alors $\log(x)$ et $\log(y)$ le sont aussi.

L'ENCADREMENT DE p/q

On va déduire un encadrement de p/q à partir de celui de 2^p obtenu précédemment: $3^q < 2^p \leq (3 + 1/m)^q$. En appliquant le logarithme, qui respecte l'ordre, on obtient: $\log(3^q) < \log(2^p) \leq \log((3 + 1/m)^q)$. En «descendant» les exposants et après quelques manipulations, on parvient à l'encadrement:

$$\frac{\log(3)}{\log(2)} < \frac{p}{q} \leq \frac{\log(3+1/m)}{\log(2)}$$

Encore une fois, plus m est grand, plus $1/m$ est petit et, par continuité, plus $\log(3+1/m)$ est proche de $\log(3)$. Autrement dit, le rapport p/q se retrouve coincé entre deux nombres d'autant plus proches que m est grand. Ces contraintes vont se révéler très fortes.

Pour un hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs, de minimum m , on a forcément $m > 5 \times 10^{18}$. Ce nombre découle de la vérification du problème $3n+1$ sur ordinateur par Tomás Oliveira e Silva jusqu'à cette borne: pour tout entier n inférieur à 5×10^{18} , sa

trajectoire finit par atteindre 1. Celle-ci ne peut donc contenir un cycle autre que le cycle trivial de longueur 3. On en déduit alors que: $\log(3)/\log(2) < p/q \leq \log(3 + 2 \times 10^{-19})/\log(2)$.

En effet, notant toujours m le minimum de C , on a $m > 5 \times 10^{18}$. En prenant les inverses, l'ordre s'inverse, ce qui donne $1/m < 1/(5 \times 10^{18})$, ou encore, puisque $1/5 = 0,2 = 2 \times 10^{-1}$, $1/m < 2 \times 10^{-19}$. Reste, de chaque côté, à ajouter 3, à prendre le logarithme et à diviser par $\log(2)$ pour parvenir à: $\log(3+1/m)/\log(2) < \log(3+2 \times 10^{-19})/\log(2)$. Combinée à l'encadrement de p/q obtenu plus haut, on obtient celui annoncé.

Concrètement, le rapport p/q est compris entre 1,5849625007211561814537389 et 1,5849625007211561815499186. La différence ne se manifeste qu'à partir de la 19^e décimale! On en déduit que si C est un cycle de Collatz non trivial dans les entiers positifs, avec p termes pairs et q impairs, alors p/q appartient à l'intervalle: $I =]1,58496250072115618145, 1,58496250072115618155[$.

UN INTERVALLE DE PLUS EN PLUS RÉDUIT

En quoi le fait de savoir que p/q est contraint d'habiter dans un intervalle aussi petit peut-il nous être utile? Assez curieusement parce que toute fraction appartenant à I est tenue d'avoir ses numérateur et dénominateur très grands. Concrètement, on peut montrer que pour tout rationnel s/t de I , avec s et t entiers positifs, on a forcément $s \geq 10439860591$ et $t \geq 6586818670$.

En particulier, ces seuils s'appliqueront à p et q respectivement, puisque p/q appartient à I . Il en découle aussitôt que la longueur de notre présumé cycle C doit dépasser la somme de ces seuils, à savoir 17026679261!

Ainsi, tout hypothétique cycle de Collatz non trivial C dans les entiers positifs doit contenir au moins 17 milliards d'éléments, s'il existe. Cela ne répond pas à notre question initiale. Mais on peut s'en satisfaire, en attendant mieux.

Et un mieux viendra peut-être bientôt. En effet, cette borne de 17 milliards repose sur la vérification actuelle du problème $3n+1$ jusqu'à 5×10^{18} . Avec du nouveau matériel informatique, on espère pouvoir vérifier la conjecture jusqu'à $2,17 \times 10^{20}$, dans quelques années sans doute (sauf si un cycle est découvert!). La borne inférieure sur les longueurs de cycles sautera alors de 17 milliards à... 186 milliards, d'un seul coup (c'est un saut d'un facteur 10)! Si vous êtes impatients, sachez que nous venons de passer en revue tous les ingrédients théoriques et numériques suffisants pour s'en convaincre. Vous êtes prêts pour le vérifier? Alors, à vos calculatrices! ■

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques*: <http://images.math.cnrs.fr/> Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

J. LAGARIAS, The Ultimate Challenge: The $3x+1$ Problem, *American Mathematical Society*, 2010.

S. ELIAHOV, The $3x+1$ problem: new lower bounds on nontrivial cycle lengths, *Discrete Mathematics*, vol. 118, pp. 45-56, 1993.