

> Intrigué par la preuve assez compliquée de Dickson, le mathématicien juif allemand Issai Schur en a cherché et découvert une plus simple, entièrement nouvelle, de nature combinatoire. C'est à l'occasion de ce travail qu'il définit une suite de nombres entiers $S(1), S(2), S(3)...$ Ces nombres de Schur $S(n)$ sont encore très mystérieux, même après plus d'un siècle d'existence. Il ne s'agit pourtant que de colorier les entiers naturels en respectant quelques contraintes...

De fait, on ne connaît exactement que les cinq premiers nombres de Schur, de $S(1)$ à $S(5)$. Et à partir du sixième, on en sait si peu qu'on ne dispose même pas de conjectures spécifiques quant à leurs valeurs possibles !

L'existence même de ces mystères révèle des lacunes profondes dans notre compréhension collective des choses mathématiques. Vouloir les percer peut avoir des conséquences bien au-delà des seuls nombres de Schur. Car, comme partout en sciences, la recherche ou la découverte de nouvelles approches pour résoudre un problème donné permet parfois des progrès inattendus dans de tout autres domaines.

Levons un coin du voile. Les quatre premiers nombres de Schur, les seuls connus jusqu'en 2017: $S(1)=1, S(2)=4, S(3)=13$ et $S(4)=44$. Quant à $S(5)$, une conjecture datant de l'an 2000 stipulait qu'il devait valoir 160. Cette conjecture a été validée en 2018 seulement, par ordinateur, par Marijn Heule, de l'université du Texas, à Austin. Comment ces fameux nombres de Schur sont-ils donc définis? Un peu de patience...

COLORIER LES ENTIERS

Commençons par fixer un nombre n de couleurs, par exemple $n = 2$. Comme palette de couleurs, prenons rouge et bleu. Ce qui compte, c'est leur nombre. Maintenant, assignons à chaque entier naturel une couleur de notre palette. Par exemple, colorions en rouge les entiers impairs et en bleu les pairs. Les entiers impairs forment alors un sous-ensemble monochromatique, c'est-à-dire d'une seule couleur. Les entiers pairs aussi.

À l'opposé de ce premier exemple, prenons un coloriage aussi aléatoire et irrégulier que possible, comme celui-ci: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10... La question qui nous intéresse est la suivante: malgré l'aspect arbitraire et irrégulier d'un tel coloriage, trouvera-t-on forcément des régularités monochromatiques? De quoi s'agit-il?

Pour Schur, ces régularités sont les triplets de nombres (a, b, c) tels que $c = a + b$; autrement dit, les triplets de la forme $(a, b, a + b)$ comme $(1, 1, 2)$ ou $(3, 5, 8)$ par exemple.

La question est donc: quel que soit le coloriage en deux couleurs des entiers naturels, aussi irrégulier soit-il, trouvera-t-on forcément un tel triplet $(a, b, a + b)$ qui soit

monochromatique? Dans l'exemple 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10... précédent, la réponse est oui: $(1, 7, 8)$, $(2, 8, 10)$ et $(3, 6, 9)$.

C'est le cœur du sujet, mais pour un nombre fini n quelconque de couleurs. La question devient: pour un coloriage arbitraire en n couleurs des entiers naturels, trouvera-t-on forcément un triplet monochromatique de la forme $(a, b, a + b)$?

La réponse est positive! C'est le théorème de Schur, énoncé en 1916. Soit n un nombre donné de couleurs: pour tout coloriage en n couleurs des entiers naturels 1,2,3..., on trouvera forcément trois entiers naturels a, b, c de même couleur tels que $c = a + b$, c'est-à-dire un triplet monochromatique de la forme $(a, b, a + b)$.

Précisons qu'il n'est pas interdit d'avoir $b = a$. Dans ce cas, le triplet $(a, b, a + b)$ devient $(a, a, 2a)$. Si a et $2a$ sont de même couleur, alors le triplet $(a, a, 2a)$ sera à la fois monochromatique et de la forme spécifiée $(a, b, a + b)$.

À partir du sixième nombre de Schur, on en sait si peu qu'on ne dispose même pas de conjectures quant à leurs valeurs possibles !

Une version équivalente de ce théorème donne quelques précisions supplémentaires et conduit, enfin, aux nombres de Schur $S(n)$.

Ce nouveau théorème, lui aussi de 1916, stipule que, pour n donné, il existe un nombre $S(n)$ défini ainsi: c'est le plus grand entier N pour lequel il est possible de colorier en n couleurs les entiers de 1 à N de façon à exclure tout triplet monochromatique de la forme $(a, b, a + b)$ avec a, b et $a + b$ compris entre 1 et N .

Que les deux versions du théorème de Schur soient équivalentes n'a rien d'évident. Un petit supplément d'information s'impose. La première version affirme l'inévitabilité d'un triplet $(a, b, a + b)$ monochromatique pour un coloriage en n couleurs de tous les entiers naturels, tandis que pour atteindre la même conclusion dans la seconde version,

on peut se restreindre à un coloriage en n couleurs des $S(n)$ premiers entiers naturels seulement. La seconde version entraîne donc la première. L'inverse est plus subtil et repose sur un principe général fort utile, le principe de compacité.

Avec la définition, voyons ce que vaut le nombre de Schur $S(2)$. À partir d'une palette de deux couleurs (rouge et bleu), on doit répondre à la question : jusqu'à quel entier maximal N peut-on colorier en rouge ou bleu chaque entier de 1 à N de façon à éviter l'émergence de triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ce N maximal sera la réponse : $S(2)=N$.

Nous avons vu que $S(2)=4$. Pour le prouver, quelques observations et un peu de raisonnement suffisent. D'abord, identifions tous les triplets de la forme $(a, b, a+b)$ dont les éléments constitutifs a , b et $a+b$ sont compris entre 1 et 4 : $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Cette liste est complète, excepté $(2,1,3)$ et $(3,1,4)$ que l'on peut froidement ignorer, puisque l'ordre entre les deux premiers termes a et b ne joue aucun rôle.

Peut-on colorier les entiers 1,2,3,4 en deux couleurs de sorte qu'aucun de ces quatre triplets $(a, b, a+b)$ ne soit monochromatique ? Oui, la preuve : 1,2,3,4. Les quatre triplets concernés deviennent $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Manifestement, aucun n'est monochromatique !

Ne peut-on pas construire un tel «bicoloriage» pour $N = 5$? Assignons à 1 la couleur rouge. Pour empêcher que $(1,1,2)$ ne soit monochromatique, il faut colorier 2 en bleu. Mais pour empêcher que $(2,2,4)$ ne soit monochromatique, le 4 doit être rouge. 1 et 4 sont donc tous les deux rouges. La seule façon d'empêcher que le triplet $(1,3,4)$ ne soit monochromatique est alors de colorier 3 en bleu. L'état actuel de notre coloriage des entiers de 1 à 4, le seul possible à ce stade pour exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques est : 1,2,3,4.

Quelle couleur peut-on assigner à 5 tout en continuant à exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ni rouge ni bleu, à cause des triplets $(1,4,5)$ et $(2,3,5)$, tous deux de la forme spécifiée ! Bref, en bicoloriant chaque entier de 1 à 5 en rouge ou en bleu, il s'avère impossible d'éviter l'émergence d'un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Ainsi, il est possible de colorier les entiers de 1 à 4 en deux couleurs tout en excluant les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques, mais il est impossible de faire de même pour les entiers de 1 à 5. On vient de démontrer que $S(2)=4$.

Quid de $S(3)=13$? Pour le démontrer, et comme pour la détermination de $S(2)$, deux étapes sont nécessaires. D'abord, construire un coloriage des entiers de 1 à 13 en trois couleurs excluant les triplets

monochromatiques de la forme $(a, b, a+b)$. Le coloriage est le suivant :

1, 4, 10, 13

2, 3, 11, 12

5, 6, 7, 8, 9

On vérifie qu'aucun triplet $(a, b, a+b)$ n'est soit tout rouge, soit tout bleu, soit tout vert.

Ensuite, il faut démontrer que 13 est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire prouver que pour tout coloriage des entiers de 1 à 14 en trois couleurs, il est impossible d'éviter l'émergence d'au moins un triplet monochromatique de la forme $(a, b, a+b)$. Nous ne donnerons pas de démonstration, mais tout un chacun, moyennant suffisamment d'essais et de patience, un peu comme face à une grille de sudoku de niveau difficile, peut tenter d'en établir une.

Quant à démontrer que $S(4)=44$, on doit d'une part montrer que $S(4) \geq 44$ et, d'autre part, que $S(4) \leq 44$. Pour la première inégalité $S(4) \geq 44$, considérons le coloriage suivant en quatre couleurs des entiers de 1 à 44 :

1, 3, 5, 15, 17, 19, 26, 28, 40, 42, 44

2, 7, 8, 18, 21, 24, 27, 33, 37, 38, 43

4, 6, 13, 20, 22, 23, 25, 30, 32, 39, 41

9, 10, 11, 12, 14, 16, 29, 31, 34, 35, 36

Avec une bonne dose de patience, on peut vérifier que pour ce coloriage, il n'existe aucun triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique. Voici quelques triplets : $(1,3,4)$, $(1,5,6)$, $(3,5,8)$, $(2,7,9)$, $(4,6,10)$, $(9,10,19)$... L'inégalité $S(4) \geq 44$ est donc vérifiée.

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $S(4) \leq 44$, il faut s'assurer que pour tous les coloriages possibles en quatre couleurs des entiers de 1 à 45, il y aura toujours au moins un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Les outils théoriques à notre disposition pour ce faire s'avèrent insuffisants ; c'est ➤