

on peut se restreindre à un coloriage en n couleurs des $S(n)$ premiers entiers naturels seulement. La seconde version entraîne donc la première. L'inverse est plus subtil et repose sur un principe général fort utile, le principe de compacité.

Avec la définition, voyons ce que vaut le nombre de Schur $S(2)$. À partir d'une palette de deux couleurs (rouge et bleu), on doit répondre à la question : jusqu'à quel entier maximal N peut-on colorier en rouge ou bleu chaque entier de 1 à N de façon à éviter l'émergence de triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ce N maximal sera la réponse : $S(2)=N$.

Nous avons vu que $S(2)=4$. Pour le prouver, quelques observations et un peu de raisonnement suffisent. D'abord, identifions tous les triplets de la forme $(a, b, a+b)$ dont les éléments constitutifs a , b et $a+b$ sont compris entre 1 et 4 : $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Cette liste est complète, excepté $(2,1,3)$ et $(3,1,4)$ que l'on peut froidement ignorer, puisque l'ordre entre les deux premiers termes a et b ne joue aucun rôle.

Peut-on colorier les entiers 1,2,3,4 en deux couleurs de sorte qu'aucun de ces quatre triplets $(a, b, a+b)$ ne soit monochromatique ? Oui, la preuve : 1,2,3,4. Les quatre triplets concernés deviennent $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Manifestement, aucun n'est monochromatique !

Ne peut-on pas construire un tel «bicoloriage» pour $N = 5$? Assignons à 1 la couleur rouge. Pour empêcher que $(1,1,2)$ ne soit monochromatique, il faut colorier 2 en bleu. Mais pour empêcher que $(2,2,4)$ ne soit monochromatique, le 4 doit être rouge. 1 et 4 sont donc tous les deux rouges. La seule façon d'empêcher que le triplet $(1,3,4)$ ne soit monochromatique est alors de colorier 3 en bleu. L'état actuel de notre coloriage des entiers de 1 à 4, le seul possible à ce stade pour exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques est : 1,2,3,4.

Quelle couleur peut-on assigner à 5 tout en continuant à exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ni rouge ni bleu, à cause des triplets $(1,4,5)$ et $(2,3,5)$, tous deux de la forme spécifiée ! Bref, en bicoloriant chaque entier de 1 à 5 en rouge ou en bleu, il s'avère impossible d'éviter l'émergence d'un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Ainsi, il est possible de colorier les entiers de 1 à 4 en deux couleurs tout en excluant les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques, mais il est impossible de faire de même pour les entiers de 1 à 5. On vient de démontrer que $S(2)=4$.

Quid de $S(3)=13$? Pour le démontrer, et comme pour la détermination de $S(2)$, deux étapes sont nécessaires. D'abord, construire un coloriage des entiers de 1 à 13 en trois couleurs excluant les triplets

monochromatiques de la forme $(a, b, a+b)$. Le coloriage est le suivant :

1, 4, 10, 13

2, 3, 11, 12

5, 6, 7, 8, 9

On vérifie qu'aucun triplet $(a, b, a+b)$ n'est soit tout rouge, soit tout bleu, soit tout vert.

Ensuite, il faut démontrer que 13 est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire prouver que pour tout coloriage des entiers de 1 à 14 en trois couleurs, il est impossible d'éviter l'émergence d'au moins un triplet monochromatique de la forme $(a, b, a+b)$. Nous ne donnerons pas de démonstration, mais tout un chacun, moyennant suffisamment d'essais et de patience, un peu comme face à une grille de sudoku de niveau difficile, peut tenter d'en établir une.

Quant à démontrer que $S(4)=44$, on doit d'une part montrer que $S(4) \geq 44$ et, d'autre part, que $S(4) \leq 44$. Pour la première inégalité $S(4) \geq 44$, considérons le coloriage suivant en quatre couleurs des entiers de 1 à 44 :

1, 3, 5, 15, 17, 19, 26, 28, 40, 42, 44

2, 7, 8, 18, 21, 24, 27, 33, 37, 38, 43

4, 6, 13, 20, 22, 23, 25, 30, 32, 39, 41

9, 10, 11, 12, 14, 16, 29, 31, 34, 35, 36

Avec une bonne dose de patience, on peut vérifier que pour ce coloriage, il n'existe aucun triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique. Voici quelques triplets : $(1,3,4)$, $(1,5,6)$, $(3,5,8)$, $(2,7,9)$, $(4,6,10)$, $(9,10,19)$... L'inégalité $S(4) \geq 44$ est donc vérifiée.

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $S(4) \leq 44$, il faut s'assurer que pour tous les coloriages possibles en quatre couleurs des entiers de 1 à 45, il y aura toujours au moins un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Les outils théoriques à notre disposition pour ce faire s'avèrent insuffisants ; c'est ➤