

on peut se restreindre à un coloriage en n couleurs des $S(n)$ premiers entiers naturels seulement. La seconde version entraîne donc la première. L'inverse est plus subtil et repose sur un principe général fort utile, le principe de compacité.

Avec la définition, voyons ce que vaut le nombre de Schur $S(2)$. À partir d'une palette de deux couleurs (rouge et bleu), on doit répondre à la question : jusqu'à quel entier maximal N peut-on colorier en rouge ou bleu chaque entier de 1 à N de façon à éviter l'émergence de triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ce N maximal sera la réponse : $S(2)=N$.

Nous avons vu que $S(2)=4$. Pour le prouver, quelques observations et un peu de raisonnement suffisent. D'abord, identifions tous les triplets de la forme $(a, b, a+b)$ dont les éléments constitutifs a , b et $a+b$ sont compris entre 1 et 4 : $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Cette liste est complète, excepté $(2,1,3)$ et $(3,1,4)$ que l'on peut froidement ignorer, puisque l'ordre entre les deux premiers termes a et b ne joue aucun rôle.

Peut-on colorier les entiers 1,2,3,4 en deux couleurs de sorte qu'aucun de ces quatre triplets $(a, b, a+b)$ ne soit monochromatique ? Oui, la preuve : 1,2,3,4. Les quatre triplets concernés deviennent $(1,1,2)$, $(1,2,3)$, $(1,3,4)$, $(2,2,4)$. Manifestement, aucun n'est monochromatique !

Ne peut-on pas construire un tel «bicoloriage» pour $N = 5$? Assignons à 1 la couleur rouge. Pour empêcher que $(1,1,2)$ ne soit monochromatique, il faut colorier 2 en bleu. Mais pour empêcher que $(2,2,4)$ ne soit monochromatique, le 4 doit être rouge. 1 et 4 sont donc tous les deux rouges. La seule façon d'empêcher que le triplet $(1,3,4)$ ne soit monochromatique est alors de colorier 3 en bleu. L'état actuel de notre coloriage des entiers de 1 à 4, le seul possible à ce stade pour exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques est : 1,2,3,4.

Quelle couleur peut-on assigner à 5 tout en continuant à exclure les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques ? Ni rouge ni bleu, à cause des triplets $(1,4,5)$ et $(2,3,5)$, tous deux de la forme spécifiée ! Bref, en bicoloriant chaque entier de 1 à 5 en rouge ou en bleu, il s'avère impossible d'éviter l'émergence d'un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Ainsi, il est possible de colorier les entiers de 1 à 4 en deux couleurs tout en excluant les triplets $(a, b, a+b)$ monochromatiques, mais il est impossible de faire de même pour les entiers de 1 à 5. On vient de démontrer que $S(2)=4$.

Quid de $S(3)=13$? Pour le démontrer, et comme pour la détermination de $S(2)$, deux étapes sont nécessaires. D'abord, construire un coloriage des entiers de 1 à 13 en trois couleurs excluant les triplets

monochromatiques de la forme $(a, b, a+b)$. Le coloriage est le suivant :

1, 4, 10, 13

2, 3, 11, 12

5, 6, 7, 8, 9

On vérifie qu'aucun triplet $(a, b, a+b)$ n'est soit tout rouge, soit tout bleu, soit tout vert.

Ensuite, il faut démontrer que 13 est maximal pour cette propriété, c'est-à-dire prouver que pour tout coloriage des entiers de 1 à 14 en trois couleurs, il est impossible d'éviter l'émergence d'au moins un triplet monochromatique de la forme $(a, b, a+b)$. Nous ne donnerons pas de démonstration, mais tout un chacun, moyennant suffisamment d'essais et de patience, un peu comme face à une grille de sudoku de niveau difficile, peut tenter d'en établir une.

Quant à démontrer que $S(4)=44$, on doit d'une part montrer que $S(4) \geq 44$ et, d'autre part, que $S(4) \leq 44$. Pour la première inégalité $S(4) \geq 44$, considérons le coloriage suivant en quatre couleurs des entiers de 1 à 44 :

1, 3, 5, 15, 17, 19, 26, 28, 40, 42, 44

2, 7, 8, 18, 21, 24, 27, 33, 37, 38, 43

4, 6, 13, 20, 22, 23, 25, 30, 32, 39, 41

9, 10, 11, 12, 14, 16, 29, 31, 34, 35, 36

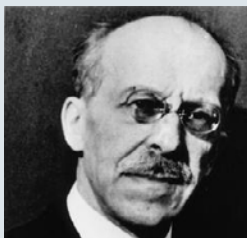
Avec une bonne dose de patience, on peut vérifier que pour ce coloriage, il n'existe aucun triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique. Voici quelques triplets : $(1,3,4)$, $(1,5,6)$, $(3,5,8)$, $(2,7,9)$, $(4,6,10)$, $(9,10,19)$... L'inégalité $S(4) \geq 44$ est donc vérifiée.

Pour démontrer l'inégalité inverse, soit $S(4) \leq 44$, il faut s'assurer que pour tous les coloriages possibles en quatre couleurs des entiers de 1 à 45, il y aura toujours au moins un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique.

Les outils théoriques à notre disposition pour ce faire s'avèrent insuffisants ; c'est >

QUI ÉTAIT ISSAÏ SCHUR ?

Issaï Schur est né à Moguilev, en Biélorussie, le 10 janvier 1875. Il a surtout travaillé en Allemagne, à Berlin et à Bonn, et s'est illustré par bien d'autres résultats que la seule découverte des nombres $S(n)$: algorithme, complément, décomposition, inégalité, lemme, polynôme... portent son nom, dans tous les grands domaines des maths. Comme pour tant de savants juifs d'Europe de cette période, ses contributions fondamentales ne l'ont pas protégé de l'anti-sémitisme nazi, qui l'a obligé à fuir l'Allemagne *in extremis* début 1939.



Il se réfugia en Palestine ; il est décédé à Tel Aviv le 10 janvier 1941, jour de son soixante-sixième anniversaire. Un colloque scientifique en sa mémoire s'est tenu en décembre 2000 à l'institut Weizmann à Rehovot, en Israël. En octobre 2016, le centenaire de la naissance des nombres de Schur a été célébré lors d'un colloque à Séville, en Espagne, dédié à la Théorie de Ramsey.

© Konrad Jacobs, Erlangen

seulement grâce à une vérification exhaustive par ordinateur qu'on arrive à l'établir. Le premier à l'avoir fait est Leonard Baumert en 1961.

Venons-en à $S(5)$... Jusqu'en 2017, on savait seulement qu'il se situait quelque part entre 160 et 305. On disposait néanmoins de la conjecture formulée par Harold Fredricksen et Melvin Sweet en 2000 selon laquelle $S(5)$ vaut *probablement* 160.

Pour démontrer l'inégalité $S(5) \geq 160$, il «suffit» d'exhiber un coloriage en 5 couleurs des entiers de 1 à 160 excluant les triplets monochromatiques de la forme $(a, b, a+b)$. Un tel coloriage a été trouvé par Geoffrey Exoo en 1994 par ordinateur :

1, 6, 10, 18, 21, 23, 26, 30, 34, 38, 43, 45, 50, 54, 65, 74...

2, 3, 8, 14, 19, 20, 24, 25, 36, 46, 47, 51, 62, 73...

4, 5, 15, 16, 22, 28, 29, 39, 40, 41, 42, 48, 49, 59...

7, 9, 11, 12, 13, 17, 27, 31, 32, 33, 35, 37, 53, 56, 57, 61, 79...

44, 52, 55, 58, 60, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 75, 76, 77, 78, 80...

Ce coloriage est symétrique, c'est-à-dire qu'il assigne la même couleur à un entier x et à son symétrique $161-x$. Les couleurs des entiers de 1 à 80 suffisent donc à définir le coloriage.

Peut-on pousser d'un cran et trouver un coloriage similaire en 5 couleurs des entiers de 1 à 161 évitant complètement les triplets monochromatiques de la forme $(a, b, a+b)$? On l'ignorait jusqu'à peu!

Puis la réponse est tombée en 2018. Non, c'est impossible : quel que soit le coloriage en 5 couleurs des entiers de 1 à 161, on trouvera forcément un triplet $(a, b, a+b)$ monochromatique, c'est inévitable. Ce résultat a été obtenu par Marijn Heule *via* un calcul massif sur ordinateur, grâce à de nouvelles méthodes d'attaque de problèmes de logique booléenne. Il vient

accompagné d'un certificat informatique de validité pesant quelques... 2 pétaoctets en format comprimé ! Bref, on connaît désormais $S(5)$, il vaut 160 exactement.

Malgré cette avancée spectaculaire, le mystère entourant $S(5)$ n'est que partiellement levé. En effet, sans ordinateur, on ne sait toujours pas dire plus que : $S(5)$ se situe quelque part entre 160 et 305. Réduire cette grosse marge d'incertitude grâce à des avancées théoriques serait hautement souhaitable, et permettrait sans doute d'en savoir plus sur les insaisissables nombres de Schur suivants.

VERS $S(6)$ ET AU-DELÀ...

Que sait-on sur $S(n)$ pour $n \geq 6$? Pas grand-chose, à part un encadrement de $S(n)$ entre deux bornes (ici légèrement simplifié) démontré par Schur lui-même, et pas substantiellement amélioré depuis : $(3^n - 1)/2 \leq S(n) \leq 3 \times n! - 1$. Le symbole $n!$ se lit « n factorielle» et est défini par $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Contrairement au cas de $S(5)$, on ne dispose d'aucune conjecture raisonnable quant à la valeur exacte de $S(6)$, et plus généralement de $S(n)$ pour tout $n \geq 6$; même après plus d'un siècle, on en sait encore trop peu pour s'y oser.

L'écart entre les deux bornes encadrant $S(n)$ croît très vite en fonction de n :

n	$(3^n - 1)/2$	$3 \times n! - 1$
2	4	5
3	13	17
4	40	71
5	121	359
6	364	2159
7	1093	15119
8	3280	120959

Par conséquent, l'incertitude concernant la valeur précise de $S(n)$ dans l'intervalle ainsi délimité croît elle aussi très vite en fonction de n , du moins en l'état actuel des connaissances.

Les nombres de Schur s'inscrivent dans une théorie générale, la théorie de Ramsey, développée vers 1930 par l'Anglais Frank Plumpton Ramsey. Utilisée en informatique théorique, cette théorie concerne la question suivante : étant donné un objet mathématique quel qu'il soit, si l'on colorie ses éléments en un nombre fini de couleurs, existera-t-il forcément un sous-objet – d'un type spécifié à l'avance – dont tous les éléments sont d'une même couleur, c'est-à-dire monochromatique? Les nombres de Schur sont précisément une manifestation, avant la lettre, de ce type de problématique. ■

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques* : <http://images.math.cnrs.fr/> Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

M. Heule, Schur Number Five, *The Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence*, La Nouvelle-Orléans, 2-7 février 2018.