

L'ESSENTIEL

● Le nombre d'or, ou φ , surgit souvent là où on ne l'attend pas en mathématiques.

● Ainsi, de par la particularité de l'équation qu'il vérifie, on le retrouve dans des objets fractals, comme l'ensemble de Cantor.

● L'équation caractérisant le nombre d'or permet

la construction d'un ensemble de points quasi-périodique, un modèle des «quasi-cristaux», ces nouveaux matériaux découverts récemment.

● Ces liens du nombre d'or avec la physique soulèvent plusieurs questions mathématiques.

L'AUTEUR



JÉRÔME BUZZI
directeur de recherches CNRS,
travaille au Laboratoire de
mathématiques d'Orsay,
à l'université Paris-Sud.

Le nombre d'or fait (encore) parler de lui

Le nombre d'or est connu depuis l'Antiquité et l'on pensait en avoir fini avec lui. C'était sans compter sur ses propriétés de symétrie qui expliquent l'intérêt de ce nombre pour la recherche mathématique d'aujourd'hui.

L

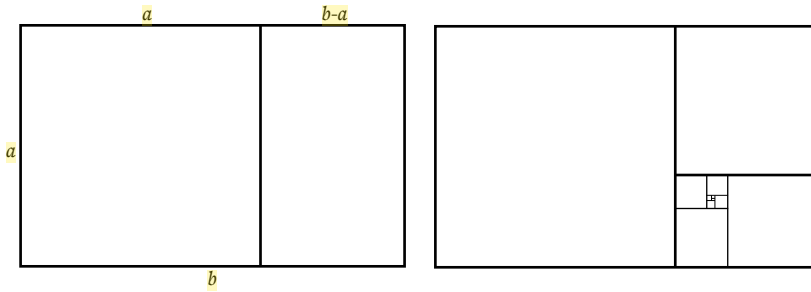
e nombre d'or, désigné par la lettre grecque φ (prononcée *fi*), fascine depuis plus de deux millénaires. Identifié dès l'Antiquité, par exemple par les pythagoriciens, on le retrouve à toutes les époques: dans les écrits du mathématicien perse Al-Khawarizmi au VIII^e siècle, dans *La divine proportion*, de

Luca Pacioli et illustré par Léonard de Vinci, à la fin du XV^e siècle, dans les poèmes de Paul Valéry au début du XX^e siècle... Ce sont aussi bien ses propriétés mathématiques que son symbolisme quasi-mystique qui intéressent. De là à penser que tout a été dit sur le nombre d'or, il n'y a qu'un pas... que nous ne franchissons pas, car ce n'est pas le cas!

Aujourd'hui encore, le nombre d'or est au cœur de recherches actives. Grâce aux liens que φ entretient avec l'idée de symétrie, elles empruntent des chemins inattendus qui mènent à l'étude des quasi-cristaux, des cristaux découverts au début des années 1980 dont la structure n'est pas périodique, à l'inverse de celle des cristaux classiques. Cette découverte d'ordre physique soulève des questions mathématiques.

Parmi les différentes façons de définir le nombre d'or (voir l'encadré page 48), la plus simple stipule que φ est le rapport entre la longueur b et la largeur a d'un rectangle R tel que, si on enlève de R le plus grand carré qu'il contienne (de côté a), le rectangle restant R'

Un pavage de Penrose est non périodique. Les dimensions des pavés qui le constituent sont fondées sur le nombre d'or.



> de longueur a et de largeur $b-a$, est semblable au rectangle initial, c'est-à-dire que le rapport entre longueur et largeur, φ donc, est le même que pour R (voir la figure ci-dessus).

De cette construction, on peut établir une équation. Les longueurs des côtés du sous-rectangle sont a et $b-a$, on doit donc avoir: $b/a = \varphi$ et $b/a = a/(b-a)$. Ceci donne $\varphi = 1/(\varphi - 1)$, soit $\varphi^2 - \varphi = 1$. C'est une équation du second degré dont les solutions sont: $(1 + \sqrt{5})/2$ et $(1 - \sqrt{5})/2$. Cette dernière solution, inférieure à 0, ne peut pas être φ (le rapport de la longueur sur la largeur). On en déduit que $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit environ 1,618.

Comme le sous-rectangle R' est semblable au rectangle de départ R , on peut répéter la construction, c'est-à-dire enlever le plus grand carré possible du sous-rectangle R' . Et on peut recommencer indéfiniment.

La figure obtenue (prolongée à l'infini) est auto-similaire: dilatée de φ et tournée de 90° , on retrouve la même figure. C'est une forme de symétrie, une notion mathématique qui nous mènera jusqu'aux quasi-cristaux, des objets presque réguliers découverts en 1984.

BIENVENUE EN SYMÉTRIE

La symétrie est une des grandes idées des mathématiques. Un objet est symétrique quand de «bonnes» transformations le laissent inchangé. Ce sont en l'occurrence des isométries, c'est-à-dire des transformations du plan qui ne modifient pas les distances. Par exemple, si on tourne un carré de 90° autour de son centre, on obtient la même figure, même si tous les points du carré ont été déplacés (voir la figure ci-contre).

La rotation R d'angle 90° autour du centre du carré est une symétrie du carré. Un carré est aussi symétrique par rapport à l'une de ses diagonales: il est invariant par la transformation correspondante M . Si on nomme A, B, C et D les sommets du carré, alors M est caractérisé parmi les isométries du plan par: $M(A) = A$, $M(B) = D$, $M(C) = C$ et $M(D) = B$. En clair, après M , A et C ne changent pas de position, B et D échangent les leurs. Outre R et M , on peut définir la rotation S de -90° , la rotation T d'angle 180° et la symétrie E d'axe vertical.

Les trois symétries S, T et E peuvent en fait être fabriquées à partir des deux

Le nombre d'or φ est le rapport entre la longueur b et la largeur a d'un rectangle (à gauche) tel que, si on enlève le plus grand carré qu'il contienne (de côté a), le rapport entre longueur et largeur reste inchangé. En répétant indéfiniment la construction (à droite), on obtient une figure auto-similaire.

premières, R et M , indépendamment de toute considération géométrique. En effet, S est l'inverse de R : l'image par S d'un point x du carré $ABCD$ est le point y dont l'image par R est x ; $S(x) = y$ quand $x = R(y)$. Ainsi, l'inverse d'une symétrie est une symétrie. On note $\bar{U}$ l'inverse d'une symétrie U . On observe que $U(\bar{U}(x)) = \bar{U}(U(x)) = x$, ce que les mathématiciens aiment résumer par $U\bar{U} = \bar{U}U = \text{Id}$ où Id est la transformation identité qui ne fait... rien: $\text{Id}(x) = x$ pour tout x .

La symétrie d'axe vertical E est la composée de deux symétries, une symétrie M autour de la diagonale suivie d'une rotation R de 90° , ce qui s'écrit $E(x) = R(M(x))$ pour tout x ou, plus brièvement, $E = RM$. Notons que la composée de deux symétries est automatiquement une symétrie.

On peut donc fabriquer des symétries à partir de symétries déjà déterminées, simplement en prenant des inverses ou des composées de celles-ci, indépendamment de la nature géométrique du problème. On peut recommencer tant qu'on obtient de nouvelles symétries. Dans notre exemple, en partant de S et M , on obtient finalement huit symétries: $R, M, \bar{R}, \bar{M}, \text{Id}, RM, MR$ et RRM .

Cet ensemble est le groupe du carré, au sens mathématique du terme, engendré par S et M . Un groupe est un ensemble de transformations tel que l'inverse ou la composée de n'importe lequel de ses éléments est encore un élément de celui-ci.

L'ESPACE DE CANTOR

Poursuivons notre exploration de la symétrie avec l'un des premiers fractals découverts par les mathématiciens: l'ensemble de Cantor (accompagné de copies décalées par les nombres entiers). Il a été étudié par le mathématicien

Le carré dispose de nombreuses symétries qui le laissent inchangé: R, M, S, T et E

