

- > de longueur a et de largeur $b-a$, est semblable au rectangle initial, c'est-à-dire que le rapport entre longueur et largeur, φ donc, est le même que pour R (voir la figure ci-dessus).

De cette construction, on peut établir une équation. Les longueurs des côtés du sous-rectangle sont a et $b-a$, on doit donc avoir: $b/a = \varphi$ et $b/a = a/(b-a)$. Ceci donne $\varphi = 1/(\varphi - 1)$, soit $\varphi^2 - \varphi = 1$. C'est une équation du second degré dont les solutions sont: $(1 + \sqrt{5})/2$ et $(1 - \sqrt{5})/2$. Cette dernière solution, inférieure à 0, ne peut pas être φ (le rapport de la longueur sur la largeur). On en déduit que $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit environ 1,618.

Comme le sous-rectangle R' est semblable au rectangle de départ R , on peut répéter la construction, c'est-à-dire enlever le plus grand carré possible du sous-rectangle R' . Et on peut recommencer indéfiniment.

La figure obtenue (prolongée à l'infini) est auto-similaire: dilatée de φ et tournée de 90° , on retrouve la même figure. C'est une forme de symétrie, une notion mathématique qui nous mènera jusqu'aux quasi-cristaux, des objets presque réguliers découverts en 1984.

BIENVENUE EN SYMÉTRIE

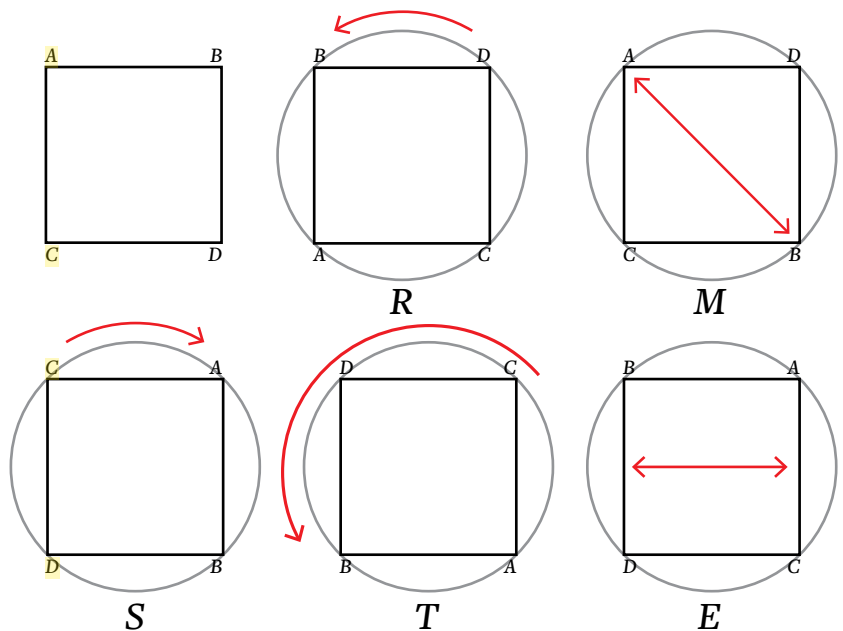
La symétrie est une des grandes idées des mathématiques. Un objet est symétrique quand de «bonnes» transformations le laissent inchangé. Ce sont en l'occurrence des isométries, c'est-à-dire des transformations du plan qui ne modifient pas les distances. Par exemple, si on tourne un carré de 90° autour de son centre, on obtient la même figure, même si tous les points du carré ont été déplacés (voir la figure ci-contre).

La rotation R d'angle 90° autour du centre du carré est une symétrie du carré. Un carré est aussi symétrique par rapport à l'une de ses diagonales: il est invariant par la transformation correspondante M . Si on nomme A, B, C et D les sommets du carré, alors M est caractérisé parmi les isométries du plan par: $M(A) = A$, $M(B) = D$, $M(C) = C$ et $M(D) = B$. En clair, après M , A et C ne changent pas de position, B et D échangent les leurs. Outre R et M , on peut définir la rotation S de -90° , la rotation T d'angle 180° et la symétrie E d'axe vertical.

Les trois symétries S, T et E peuvent en fait être fabriquées à partir des deux

Le nombre d'or φ est le rapport entre la longueur b et la largeur a d'un rectangle (à gauche) tel que, si on enlève le plus grand carré qu'il contienne (de côté a), le rapport entre longueur et largeur reste inchangé. En répétant indéfiniment la construction (à droite), on obtient une figure auto-similaire.

Le carré dispose de nombreuses symétries qui le laissent inchangé: R, M, S, T et E



premières, R et M , indépendamment de toute considération géométrique. En effet, S est l'inverse de R : l'image par S d'un point x du carré $ABCD$ est le point y dont l'image par R est x ; $S(x) = y$ quand $x = R(y)$. Ainsi, l'inverse d'une symétrie est une symétrie. On note $\bar{U}$ l'inverse d'une symétrie U . On observe que $U(\bar{U}(x)) = \bar{U}(U(x)) = x$, ce que les mathématiciens aiment résumer par $U\bar{U} = \bar{U}U = \text{Id}$ où Id est la transformation identité qui ne fait... rien: $\text{Id}(x) = x$ pour tout x .

La symétrie d'axe vertical E est la composée de deux symétries, une symétrie M autour de la diagonale suivie d'une rotation R de 90° , ce qui s'écrit $E(x) = R(M(x))$ pour tout x ou, plus brièvement, $E = RM$. Notons que la composée de deux symétries est automatiquement une symétrie.

On peut donc fabriquer des symétries à partir de symétries déjà déterminées, simplement en prenant des inverses ou des composées de celles-ci, indépendamment de la nature géométrique du problème. On peut recommencer tant qu'on obtient de nouvelles symétries. Dans notre exemple, en partant de S et M , on obtient finalement huit symétries: $R, M, \bar{R}, \bar{M}, \text{Id}, RM, MR$ et RRM .

Cet ensemble est le groupe du carré, au sens mathématique du terme, engendré par S et M . Un groupe est un ensemble de transformations tel que l'inverse ou la composée de n'importe lequel de ses éléments est encore un élément de celui-ci.

L'ESPACE DE CANTOR

Poursuivons notre exploration de la symétrie avec l'un des premiers fractals découverts par les mathématiciens: l'ensemble de Cantor (accompagné de copies décalées par les nombres entiers). Il a été étudié par le mathématicien