

- de longueur a et de largeur $b-a$, est semblable au rectangle initial, c'est-à-dire que le rapport entre longueur et largeur, φ donc, est le même que pour R (voir la figure ci-dessus).

De cette construction, on peut établir une équation. Les longueurs des côtés du sous-rectangle sont a et $b-a$, on doit donc avoir: $b/a = \varphi$ et $b/a = a/(b-a)$. Ceci donne $\varphi = 1/(\varphi - 1)$, soit $\varphi^2 - \varphi = 1$. C'est une équation du second degré dont les solutions sont: $(1 + \sqrt{5})/2$ et $(1 - \sqrt{5})/2$. Cette dernière solution, inférieure à 0, ne peut pas être φ (le rapport de la longueur sur la largeur). On en déduit que $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit environ 1,618.

Comme le sous-rectangle R' est semblable au rectangle de départ R , on peut répéter la construction, c'est-à-dire enlever le plus grand carré possible du sous-rectangle R' . Et on peut recommencer indéfiniment.

La figure obtenue (prolongée à l'infini) est auto-similaire: dilatée de φ et tournée de 90° , on retrouve la même figure. C'est une forme de symétrie, une notion mathématique qui nous mènera jusqu'aux quasi-cristaux, des objets presque réguliers découverts en 1984.

BIENVENUE EN SYMÉTRIE

La symétrie est une des grandes idées des mathématiques. Un objet est symétrique quand de «bonnes» transformations le laissent inchangé. Ce sont en l'occurrence des isométries, c'est-à-dire des transformations du plan qui ne modifient pas les distances. Par exemple, si on tourne un carré de 90° autour de son centre, on obtient la même figure, même si tous les points du carré ont été déplacés (voir la figure ci-contre).

La rotation R d'angle 90° autour du centre du carré est une symétrie du carré. Un carré est aussi symétrique par rapport à l'une de ses diagonales: il est invariant par la transformation correspondante M . Si on nomme A, B, C et D les sommets du carré, alors M est caractérisé parmi les isométries du plan par: $M(A) = A$, $M(B) = D$, $M(C) = C$ et $M(D) = B$. En clair, après M , A et C ne changent pas de position, B et C échangent les leurs. Outre R et M , on peut définir la rotation S de -90° , la rotation T d'angle 180° et la symétrie E d'axe vertical.

Les trois symétries S, T et E peuvent en fait être fabriquées à partir des deux

Le nombre d'or φ est le rapport entre la longueur b et la largeur a d'un rectangle (à gauche) tel que, si on enlève le plus grand carré qu'il contienne (de côté a), le rapport entre longueur et largeur reste inchangé. En répétant indéfiniment la construction (à droite), on obtient une figure auto-similaire.

premières, R et M , indépendamment de toute considération géométrique. En effet, S est l'inverse de R : l'image par S d'un point x du carré $ABCD$ est le point y dont l'image par R est x ; $S(x) = y$ quand $x = R(y)$. Ainsi, l'inverse d'une symétrie est une symétrie. On note $\bar{U}$ l'inverse d'une symétrie U . On observe que $U(\bar{U}(x)) = \bar{U}(U(x)) = x$, ce que les mathématiciens aiment résumer par $U\bar{U} = \bar{U}U = \text{Id}$ où Id est la transformation identité qui ne fait... rien: $\text{Id}(x) = x$ pour tout x .

La symétrie d'axe vertical E est la composée de deux symétries, une symétrie M autour de la diagonale suivie d'une rotation R de 90° , ce qui s'écrit $E(x) = R(M(x))$ pour tout x ou, plus brièvement, $E = RM$. Notons que la composée de deux symétries est automatiquement une symétrie.

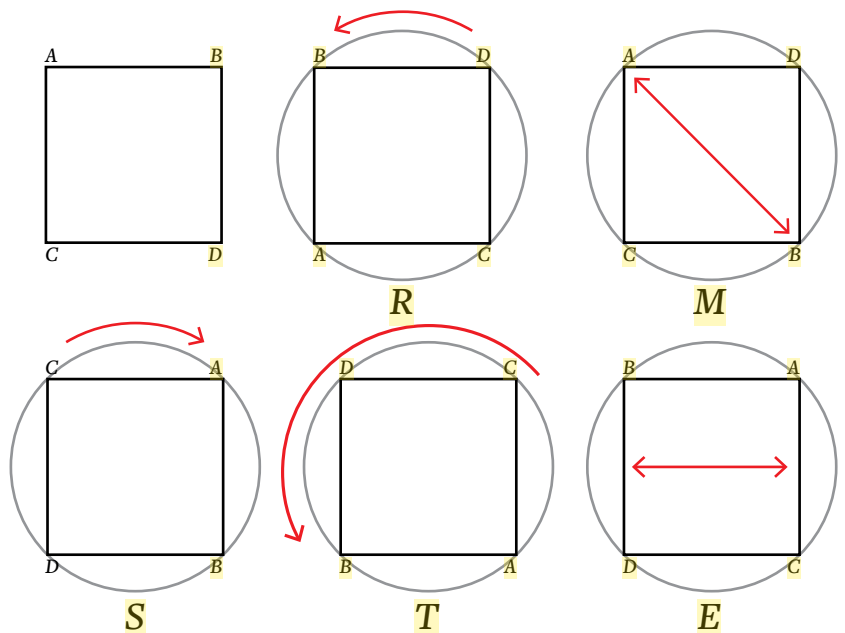
On peut donc fabriquer des symétries à partir de symétries déjà déterminées, simplement en prenant des inverses ou des composées de celles-ci, indépendamment de la nature géométrique du problème. On peut recommencer tant qu'on obtient de nouvelles symétries. Dans notre exemple, en partant de S et M , on obtient finalement huit symétries: $R, M, \bar{R}, \bar{M}, \text{Id}, RM, MR$ et RRM .

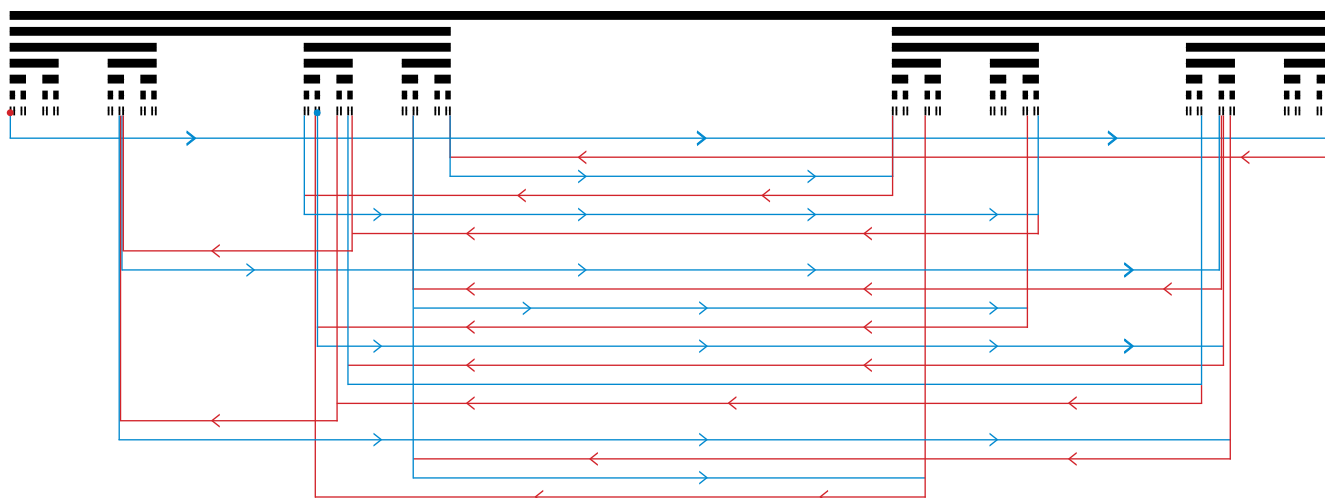
Cet ensemble est le groupe du carré, au sens mathématique du terme, engendré par S et M . Un groupe est un ensemble de transformations tel que l'inverse ou la composée de n'importe lequel de ses éléments est encore un élément de celui-ci.

L'ESPACE DE CANTOR

Poursuivons notre exploration de la symétrie avec l'un des premiers fractals découverts par les mathématiciens: l'ensemble de Cantor (accompagné de copies décalées par les nombres entiers). Il a été étudié par le mathématicien

Le carré dispose de nombreuses symétries qui le laissent inchangé: R, M, S, T et E





allemand Georg Cantor en 1883, mais il avait déjà été remarqué par d'autres notamment le Britannique Henry John Stephen Smith en 1874. Une façon de le mettre en évidence consiste à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite (voir la figure ci-dessus). On peut aussi voir dans cet ensemble une partie de la droite construite à partir de symétries définies par deux transformations S et T de la droite. S dilate la droite à partir d'un point origine A d'un facteur trois tandis que T effectue une symétrie autour d'un autre point B .

Si on introduit des coordonnées bien choisies, les points de la droite sont représentés par les nombres et on peut faire en sorte que A corresponde à 0 et B à $1/2$. Les transformations S et T correspondent alors aux formules : $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$ où x est un nombre quelconque. Les points A et B deviennent des points fixes de respectivement S et T , car $S(0) = 0$ et $T(1/2) = 1/2$.

Le groupe G engendré par ces deux transformations s'obtient, on l'a vu, en ajoutant à S et T les inverses et les compositions : $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, ST , TS , $\tilde{S}\tilde{T}$, $\tilde{T}\tilde{S}$, SST , STS ... Le groupe G est infini, contrairement à celui des symétries du carré. Par exemple composer n fois S avec lui-même donne la transformation qui envoie x sur $3^n x$: S , SS , SSS , $SSSS$... sont des transformations distinctes (à l'inverse des transformations du carré). L'ensemble de Cantor s'obtient en calculant l'image de 0 par tous les éléments du groupe G (voir la figure ci-dessus).

À partir du groupe G nous avons construit un ensemble K , l'ensemble de Cantor. Réciproquement cet ensemble K a pour groupe de symétries G exactement. Si K est un objet compliqué (un fractal), G est fabriqué à partir de transformations très simples qui permettent son analyse. On peut ainsi calculer à partir de G la dimension fractale d de K : $d = \log 2 / \log 3$, soit environ 0,631...

L'ensemble de Cantor (en noir) se construit à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite. On peut aussi obtenir cet ensemble à partir des transformations $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$, ainsi que leurs inverses et leurs compositions : ce sont les transformations du groupe G . À partir de 0 (le point rouge), on calcule l'image par chacune des transformations de G . Ici, une vingtaine d'images successives sont représentées, où T (en bleu) et $\tilde{S}$ (en rouge) alternent jusqu'au point bleu.

Le 2 correspond au nombre d'éléments (S et T) générant le groupe et le 3 correspondant au facteur de dilatation de S . Il est temps désormais de revenir au nombre d'or...

L'équation établie au début de cet article $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ peut se réécrire ainsi $\varphi^2 = \varphi + 1$ et s'interpréter géométriquement comme : la dilatation par un facteur φ d'un intervalle de longueur φ est l'union d'un intervalle de longueur φ et d'un intervalle de longueur 1. Désignons par T la transformation de dilatation-subdivision qui prend un découpage d'un segment de la droite en sous-segments de longueurs 1 ou φ , le dilate d'un facteur φ et découpe les sous-segments de longueur φ^2 en un segment de longueur φ suivi par un de longueur 1. Si on part du segment $[0, \varphi]$, on obtient successivement par application répétée de T la figure ci-dessous.

À la limite on obtient une partition R de la demi-droite qui est invariante par la transformation T de dilatation et subdivision. Cette invariance confère à R de curieuses propriétés. D'abord, R n'est pas périodique. Autrement dit, aucune translation de R vers la gauche ne redonne exactement R lui-même. Ensuite, R est quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il existe des translations de R qui coïncident avec R sur une longueur arbitrairement grande.

L'IMAGE DU 8 AVRIL 1982

L'ensemble R intéresse les physiciens, car il ressemble à un cristal aperiodique. De quoi s'agit-il ? Un cristal se reconnaît expérimentalement à partir de sa figure de diffraction des rayons X. Celle-ci se présente en effet comme un réseau de points brillants alors que les matériaux non-cristallins produisent une figure diffuse. Tout a changé le 8 avril 1982 avec une figure de diffraction étonnante : un réseau de points brillants (comme dans le cas d'un cristal) présentant une symétrie d'ordre 10 (c'est-à-dire invariante par la rotation d'angle 36°). Or un cristal, étant un