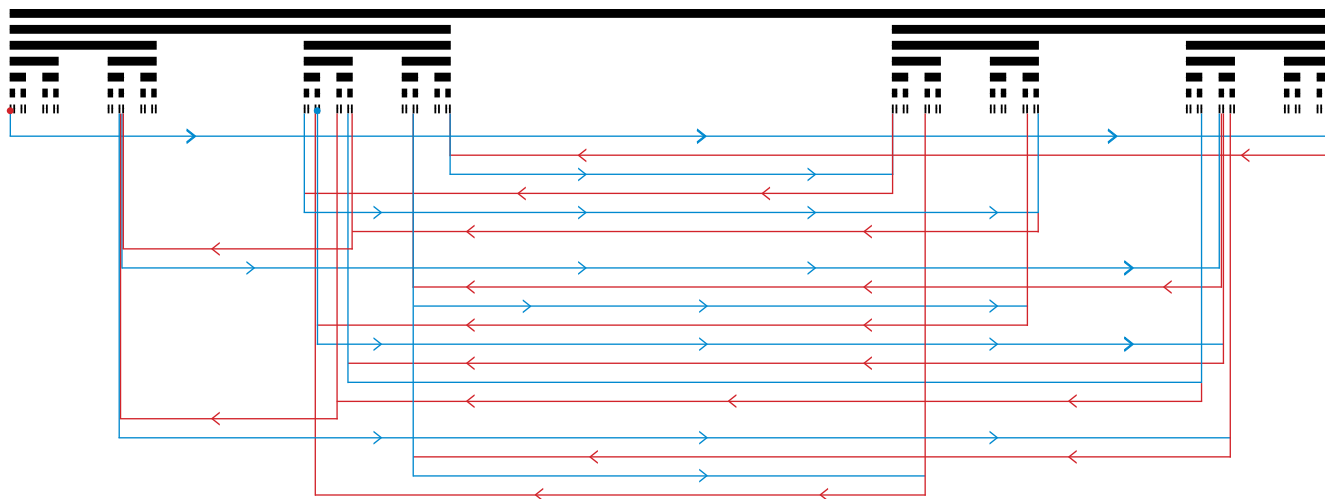




allemand Georg Cantor en 1883, mais il avait déjà été remarqué par d'autres notamment le Britannique Henry John Stephen Smith en 1874. Une façon de le mettre en évidence consiste à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite (voir la figure ci-dessus). On peut aussi voir dans cet ensemble une partie de la droite construite à partir de symétries définies par deux transformations S et T de la droite. S dilate la droite à partir d'un point origine A d'un facteur trois tandis que T effectue une symétrie autour d'un autre point B .

Si on introduit des coordonnées bien choisies, les points de la droite sont représentés par les nombres et on peut faire en sorte que A corresponde à 0 et B à $1/2$. Les transformations S et T correspondent alors aux formules : $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$ où x est un nombre quelconque. Les points A et B deviennent des points fixes de respectivement S et T , car $S(0) = 0$ et $T(1/2) = 1/2$.

Le groupe G engendré par ces deux transformations s'obtient, on l'a vu, en ajoutant à S et T les inverses et les compositions : $\bar{S}$, $\bar{T}$, ST , TS , $\bar{S}\bar{T}$, $\bar{T}\bar{S}$, SST , STS ... Le groupe G est infini, contrairement à celui des symétries du carré. Par exemple composer n fois S avec lui-même donne la transformation qui envoie x sur $3^n x$: S , SS , SSS , $SSSS$... sont des transformations distinctes (à l'inverse des transformations du carré). L'ensemble de Cantor s'obtient en calculant l'image de 0 par tous les éléments du groupe G (voir la figure ci-dessus).

À partir du groupe G nous avons construit un ensemble K , l'ensemble de Cantor. Réciproquement cet ensemble K a pour groupe de symétries G exactement. Si K est un objet compliqué (un fractal), G est fabriqué à partir de transformations très simples qui permettent son analyse. On peut ainsi calculer à partir de G la dimension fractale d de K : $d = \log 2 / \log 3$, soit environ 0,631...

L'ensemble de Cantor (en noir) se construit à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite. On peut aussi obtenir cet ensemble à partir des transformations $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$, ainsi que leurs inverses et leurs compositions : ce sont les transformations du groupe G . À partir de 0 (le point rouge), on calcule l'image par chacune des transformations de G . Ici, une vingtaine d'images successives sont représentées, où T (en bleu) et $\bar{S}$ (en rouge) alternent jusqu'au point bleu.

Le 2 correspond au nombre d'éléments (S et T) générant le groupe et le 3 correspondant au facteur de dilatation de S . Il est temps désormais de revenir au nombre d'or...

L'équation établie au début de cet article $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ peut se réécrire ainsi $\varphi^2 = \varphi + 1$ et s'interpréter géométriquement comme : la dilatation par un facteur φ d'un intervalle de longueur φ est l'union d'un intervalle de longueur φ et d'un intervalle de longueur 1. Désignons par T la transformation de dilatation-subdivision qui prend un découpage d'un segment de la droite en sous-segments de longueurs 1 ou φ , le dilate d'un facteur φ et découpe les sous-segments de longueur φ^2 en un segment de longueur φ suivi par un de longueur 1. Si on part du segment $[0, \varphi]$, on obtient successivement par application répétée de T la figure ci-dessous.

À la limite on obtient une partition R de la demi-droite qui est invariante par la transformation T de dilatation et subdivision. Cette invariance confère à R de curieuses propriétés. D'abord, R n'est pas périodique. Autrement dit, aucune translation de R vers la gauche ne redonne exactement R lui-même. Ensuite, R est quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il existe des translations de R qui coïncident avec R sur une longueur arbitrairement grande.

L'IMAGE DU 8 AVRIL 1982

L'ensemble R intéresse les physiciens, car il ressemble à un cristal aperiodique. De quoi s'agit-il ? Un cristal se reconnaît expérimentalement à partir de sa figure de diffraction des rayons X. Celle-ci se présente en effet comme un réseau de points brillants alors que les matériaux non-cristallins produisent une figure diffuse. Tout a changé le 8 avril 1982 avec une figure de diffraction étonnante : un réseau de points brillants (comme dans le cas d'un cristal) présentant une symétrie d'ordre 10 (c'est-à-dire invariante par la rotation d'angle 36°). Or un cristal, étant un