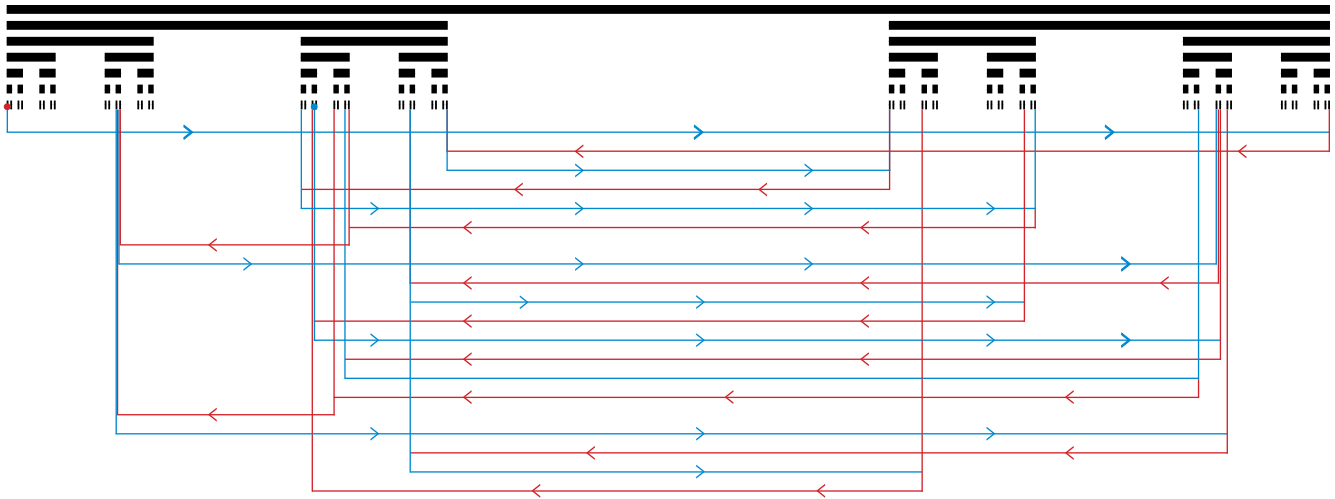




allemand Georg Cantor en 1883, mais il avait déjà été remarqué par d'autres notamment le Britannique Henry John Stephen Smith en 1874. Une façon de le mettre en évidence consiste à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite (voir la figure ci-dessus). On peut aussi voir dans cet ensemble une partie de la droite construite à partir de symétries définies par deux transformations S et T de la droite. S dilate la droite à partir d'un point origine A d'un facteur trois tandis que T effectue une symétrie autour d'un autre point B .

Si on introduit des coordonnées bien choisies, les points de la droite sont représentés par les nombres et on peut faire en sorte que A corresponde à 0 et B à $1/2$. Les transformations S et T correspondent alors aux formules : $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$ où x est un nombre quelconque. Les points A et B deviennent des points fixes de respectivement S et T , car $S(0) = 0$ et $T(1/2) = 1/2$.

Le groupe G engendré par ces deux transformations s'obtient, on l'a vu, en ajoutant à S et T les inverses et les compositions : $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, ST , TS , $\tilde{S}\tilde{T}$, $\tilde{T}\tilde{S}$, SST , STS ... Le groupe G est infini, contrairement à celui des symétries du carré. Par exemple composer n fois S avec lui-même donne la transformation qui envoie x sur $3^n x$: S , SS , SSS , $SSSS$... sont des transformations distinctes (à l'inverse des transformations du carré). L'ensemble de Cantor s'obtient en calculant l'image de 0 par tous les éléments du groupe G (voir la figure ci-dessus).

À partir du groupe G nous avons construit un ensemble K , l'ensemble de Cantor. Réciproquement cet ensemble K a pour groupe de symétries G exactement. Si K est un objet compliqué (un fractal), G est fabriqué à partir de transformations très simples qui permettent son analyse. On peut ainsi calculer à partir de G la dimension fractale d de K : $d = \log 2 / \log 3$, soit environ 0,631...

L'ensemble de Cantor (en noir) se construit à partir du segment $[0, 1]$ dont on ôte le tiers central, opération que l'on répète sur les deux segments restants, et ainsi de suite. On peut aussi obtenir cet ensemble à partir des transformations $S(x) = 3x$ et $T(x) = 1-x$, ainsi que leurs inverses et leurs compositions : ce sont les transformations du groupe G . À partir de 0 (le point rouge), on calcule l'image par chacune des transformations de G . Ici, une vingtaine d'images successives sont représentées, où T (en bleu) et $\tilde{S}$ (en rouge) alternent jusqu'au point bleu.

Le 2 correspond au nombre d'éléments (S et T) générant le groupe et le 3 correspondant au facteur de dilatation de S . Il est temps désormais de revenir au nombre d'or...

L'équation établie au début de cet article $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ peut se réécrire ainsi $\varphi^2 = \varphi + 1$ et s'interpréter géométriquement comme : la dilatation par un facteur φ d'un intervalle de longueur φ est l'union d'un intervalle de longueur φ et d'un intervalle de longueur 1. Désignons par T la transformation de dilatation-subdivision qui prend un découpage d'un segment de la droite en sous-segments de longueurs 1 ou φ , le dilate d'un facteur φ et découpe les sous-segments de longueur φ^2 en un segment de longueur φ suivi par un de longueur 1. Si on part du segment $[0, \varphi]$, on obtient successivement par application répétée de T la figure ci-dessous.

À la limite on obtient une partition R de la demi-droite qui est invariante par la transformation T de dilatation et subdivision. Cette invariance confère à R de curieuses propriétés. D'abord, R n'est pas périodique. Autrement dit, aucune translation de R vers la gauche ne redonne exactement R lui-même. Ensuite, R est quasi-périodique, c'est-à-dire qu'il existe des translations de R qui coïncident avec R sur une longueur arbitrairement grande.

L'IMAGE DU 8 AVRIL 1982

L'ensemble R intéresse les physiciens, car il ressemble à un cristal aperiodique. De quoi s'agit-il ? Un cristal se reconnaît expérimentalement à partir de sa figure de diffraction des rayons X. Celle-ci se présente en effet comme un réseau de points brillants alors que les matériaux non-cristallins produisent une figure diffuse. Tout a changé le 8 avril 1982 avec une figure de diffraction étonnante : un réseau de points brillants (comme dans le cas d'un cristal) présentant une symétrie d'ordre 10 (c'est-à-dire invariante par la rotation d'angle 36°). Or un cristal, étant un

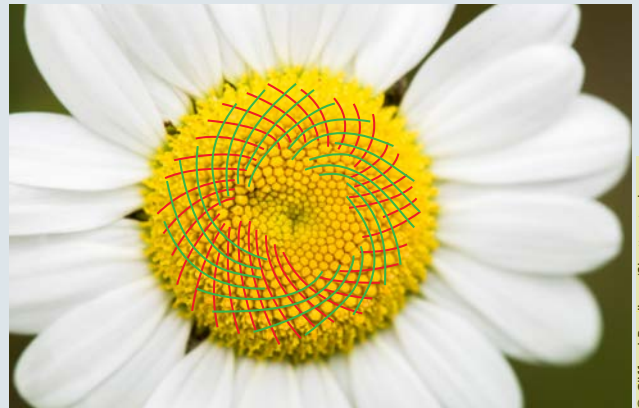
LE NOMBRE D'OR EST PARTOUT

Le nombre d'or $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit environ 1,618. Il est certes une des solutions de l'équation $x^2 - x = 1$, mais on le trouve dans beaucoup d'autres situations. Par exemple, dans un pentagone régulier, le rapport de la longueur des diagonales sur la longueur des côtés est égal à φ . Cela se traduit par l'égalité $2 \cos(\pi/5) = \varphi$. De l'équation précédente, on peut également montrer que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Le nombre d'or se cache aussi dans la suite de Fibonacci ainsi définie : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Chaque terme (à part les deux premiers) est la somme des deux précédents : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Au XVI^e siècle, l'astronome Kepler a remarqué que le rapport F_{n+2}/F_{n+1} de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ à mesure n croît. Le nombre d'or se

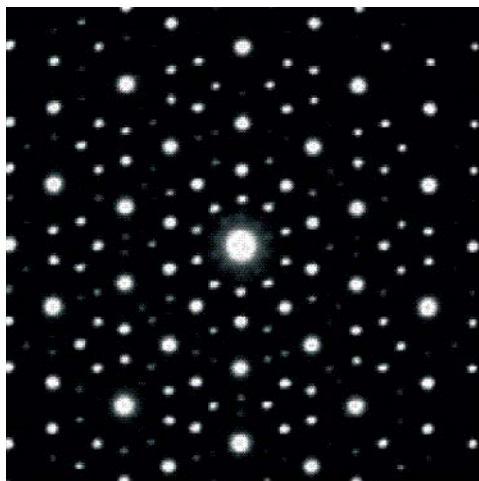
retrouve enfin dans le monde végétal. Les écailles des pommes de pin, les fleurons des tournesols et des marguerites, les feuilles le long d'une tige s'agencent en deux séries de spirales. Lorsqu'on les compte, on trouve deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci, et donc une approximation du nombre d'or !



© Clifford Pugliese/Shutterstock.com

> motif périodique de dimension 3, ne peut avoir de symétries que d'ordre 2, 3, 4 ou 6 d'après un théorème similaire à celui qui limite les solides réguliers aux cinq solides platoniciens. C'était inconcevable et pendant plusieurs années la communauté scientifique refusa d'y croire.

Pourtant, des expériences ont confirmé la présence de cette symétrie « impossible » (voir la figure ci-dessous). On avait donc découvert une nouvelle organisation de la matière : ordonnée comme des cristaux, mais sans être périodique comme eux. La découverte de ces « quasi-cristaux » a valu le prix Nobel de chimie, en 2011, à Dan Shechtman, l'auteur de l'image du 8 avril. L'ensemble R offre un modèle (très simplifié) de ces objets physiques quasi-périodiques.



© P. Schechtman

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques* : <http://images.math.cnrs.fr/> Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

M. BAAKE ET U. GRIMM, *Aperiodic Order*, vol. 1. A Mathematical Invitation, Cambridge University Press, 2013.

R. PENROSE, Tilings and quasicrystals : a nonlocal growth problem? in M. Jaric (Ed.) *Introduction to the Mathematics of Quasicrystals*, Academic Press, pp. 53-58, 1989.

D. SHECHTMAN ET AL., Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1951-1953, 1984.

L'image par laquelle on a découvert les quasi-cristaux. Les points brillants sont organisés selon un motif régulier à symétrie d'ordre 5, ce qui est impossible avec des cristaux classiques.

Une question mathématique fondamentale, à ce jour non résolue, est de classer les quasi-cristaux comme on a su au XIX^e siècle classer les cristaux par leurs groupes de symétries. La dilatation-subdivision T définie par le nombre d'or φ est une piste suivie pour y parvenir. Elle est à l'origine de plusieurs procédés de construction de quasi-cristaux, notamment les pavages de Penrose du plan, qui font aussi intervenir le nombre d'or (voir la figure page 44).

PENROSE ET LE NOMBRE D'OR

Ces pavages du plan, dont certains ont une symétrie d'ordre 5, ont été découverts par le Britannique Roger Penrose dans les années 1970. Les pièces de base de ces pavages sont des triangles isocèles (des triangles d'or) dont certains côtés ont pour longueur φ .

Parmi les autres procédés fondés sur T , citons la dilatation-division liée à d'autres nombres particuliers différents de φ , la projection de points à coordonnées entières en grande dimension, les règles de compatibilité entre plus proches voisins... Ces constructions sont également utilisées en informatique théorique.

Les mathématiciens s'efforcent aujourd'hui de préciser les propriétés de ces différentes constructions : lesquelles produisent la même classe d'objets? Quand obtient-on bien une figure de diffraction conforme à celles des quasi-cristaux? Peut-on reconnaître la construction à partir des figures de diffraction? Quels sont les liens entre combinatoire et géométrie? Le nombre d'or n'a pas fini de faire parler de lui! ■