

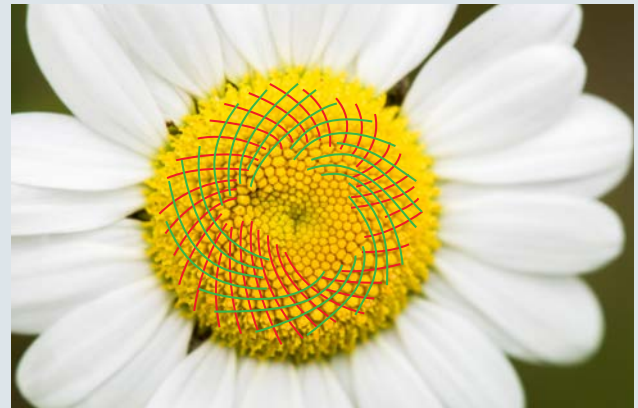
LE NOMBRE D'OR EST PARTOUT

Le nombre d'or $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, soit environ 1,618. Il est certes une des solutions de l'équation $x^2 - x = 1$, mais on le trouve dans beaucoup d'autres situations. Par exemple, dans un pentagone régulier, le rapport de la longueur des diagonales sur la longueur des côtés est égal à φ . Cela se traduit par l'égalité $2 \cos(\pi/5) = \varphi$. De l'équation précédente, on peut également montrer que :

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}$$

Le nombre d'or se cache aussi dans la suite de Fibonacci ainsi définie : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Chaque terme (à part les deux premiers) est la somme des deux précédents : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Au XVI^e siècle, l'astronome Kepler a remarqué que le rapport F_{n+2}/F_{n+1} de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci tend vers φ à mesure n croît. Le nombre d'or se

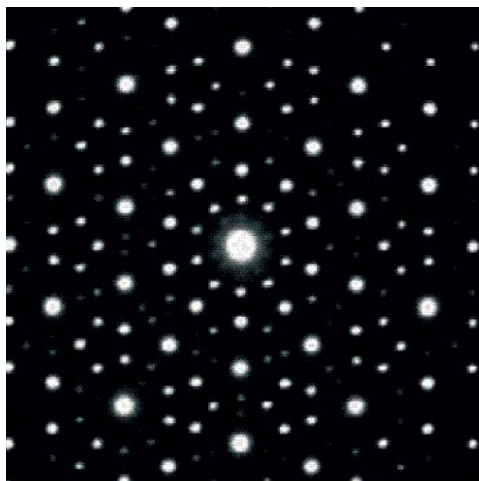
retrouve enfin dans le monde végétal. Les écailles des pommes de pin, les fleurons des tournesols et des marguerites, les feuilles le long d'une tige s'agencent en deux séries de spirales. Lorsqu'on les compte, on trouve deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci, et donc une approximation du nombre d'or !



© Clifford Pugliese/Shutterstock.com

- motif périodique de dimension 3, ne peut avoir de symétries que d'ordre 2, 3, 4 ou 6 d'après un théorème similaire à celui qui limite les solides réguliers aux cinq solides platoniciens. C'était inconcevable et pendant plusieurs années la communauté scientifique refusa d'y croire.

Pourtant, des expériences ont confirmé la présence de cette symétrie « impossible » (voir la figure ci-dessous). On avait donc découvert une nouvelle organisation de la matière : ordonnée comme des cristaux, mais sans être périodique comme eux. La découverte de ces « quasi-cristaux » a valu le prix Nobel de chimie, en 2011, à Dan Shechtman, l'auteur de l'image du 8 avril. L'ensemble R offre un modèle (très simplifié) de ces objets physiques quasi-périodiques.



© P. Schechtman

Cet article est adapté de celui paru sur le site du CNRS *Images des Mathématiques* : <http://images.math.cnrs.fr/>
Nous en remercions les équipes de nous avoir autorisé à le reproduire.

BIBLIOGRAPHIE

M. BAAKE ET U. GRIMM, *Aperiodic Order*, vol. 1. A Mathematical Invitation, Cambridge University Press, 2013.

R. PENROSE, Tilings and quasicrystals : a nonlocal growth problem? in M. Jaric (Ed.) *Introduction to the Mathematics of Quasicrystals*, Academic Press, pp. 53-58, 1989.

D. SHECHTMAN ET AL., Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 1951-1953, 1984.

L'image par laquelle on a découvert les quasi-cristaux. Les points brillants sont organisés selon un motif régulier à symétrie d'ordre 5, ce qui est impossible avec des cristaux classiques.

Une question mathématique fondamentale, à ce jour non résolue, est de classer les quasi-cristaux comme on a su au XIX^e siècle classer les cristaux par leurs groupes de symétries. La dilatation-subdivision T définie par le nombre d'or φ est une piste suivie pour y parvenir. Elle est à l'origine de plusieurs procédés de construction de quasi-cristaux, notamment les pavages de Penrose du plan, qui font aussi intervenir le nombre d'or (voir la figure page 44).

PENROSE ET LE NOMBRE D'OR

Ces pavages du plan, dont certains ont une symétrie d'ordre 5, ont été découverts par le Britannique Roger Penrose dans les années 1970. Les pièces de base de ces pavages sont des triangles isocèles (des triangles d'or) dont certains côtés ont pour longueur φ .

Parmi les autres procédés fondés sur T , citons la dilatation-division liée à d'autres nombres particuliers différents de φ , la projection de points à coordonnées entières en grande dimension, les règles de compatibilité entre plus proches voisins... Ces constructions sont également utilisées en informatique théorique.

Les mathématiciens s'efforcent aujourd'hui de préciser les propriétés de ces différentes constructions : lesquelles produisent la même classe d'objets? Quand obtient-on bien une figure de diffraction conforme à celles des quasi-cristaux? Peut-on reconnaître la construction à partir des figures de diffraction? Quels sont les liens entre combinatoire et géométrie? Le nombre d'or n'a pas fini de faire parler de lui! ■

Des nombres et des énigmes

Êtes-vous prêts pour des énigmes difficiles ? Ana Retchman, maîtresse de conférences à l'université de Strasbourg, et Sébastien Kernivinen, enseignant en mathématiques, à Rennes, vous en proposent 14. Elles sont extraites, pour la plupart, des *Défis du calendrier 2018*, d'Ana Retchman.

Suite des énigmes page 81. Solutions page 106.

Ana Retchman



Sébastien Kernivinen



ÉNIGME 1

Jusqu'à quel nombre N est-il possible de colorier en rouge ou bien en bleu les nombres entiers de 1 à N sans que deux nombres quelconques distincts de la même couleur ne redonnent, en les additionnant, un nombre de la même couleur ?
Indice : c'est un cube !

ÉNIGME 2

Combien y a-t-il de « randonnées » partant du nombre entier 1 et arrivant au nombre entier 10 en ajoutant successivement ou bien 1 ou bien 2 à chaque pas ?

ÉNIGME 3

Trouvez dix entiers positifs distincts tels que chacun d'entre eux divise la somme de ces dix nombres.

ÉNIGME 4

Quels sont les nombres rationnels positifs r tels que $r + \frac{1}{r}$ soit un entier ?