

## L'ESSENTIEL

● Deux nombres premiers sont jumeaux, cousins ou sexy selon qu'ils sont respectivement séparés par 2, 4 ou 6.

● Combien y en a-t-il ? Une infinité ? Probablement, mais les mathématiciens ne savent pas encore le démontrer.

● Toutefois, on peut s'intéresser à leur régularité au sein des

nombres entiers et étudier leur fréquence à partir de celle des nombres premiers.

● On se rapproche peut-être de la preuve tant attendue avec un résultat récent selon lequel il y a une infinité de paires de nombres premiers consécutifs distants d'au plus 246. Reste à remplacer ce 246 par 2...

## L'AUTEUR



**BRUNO MARTIN**  
Maître de conférences  
au laboratoire de recherche  
en Mathématiques de l'université  
du Littoral-Côte-d'Opale,  
à Calais.

# Des jumeaux, des cousins et... des nombres sexy

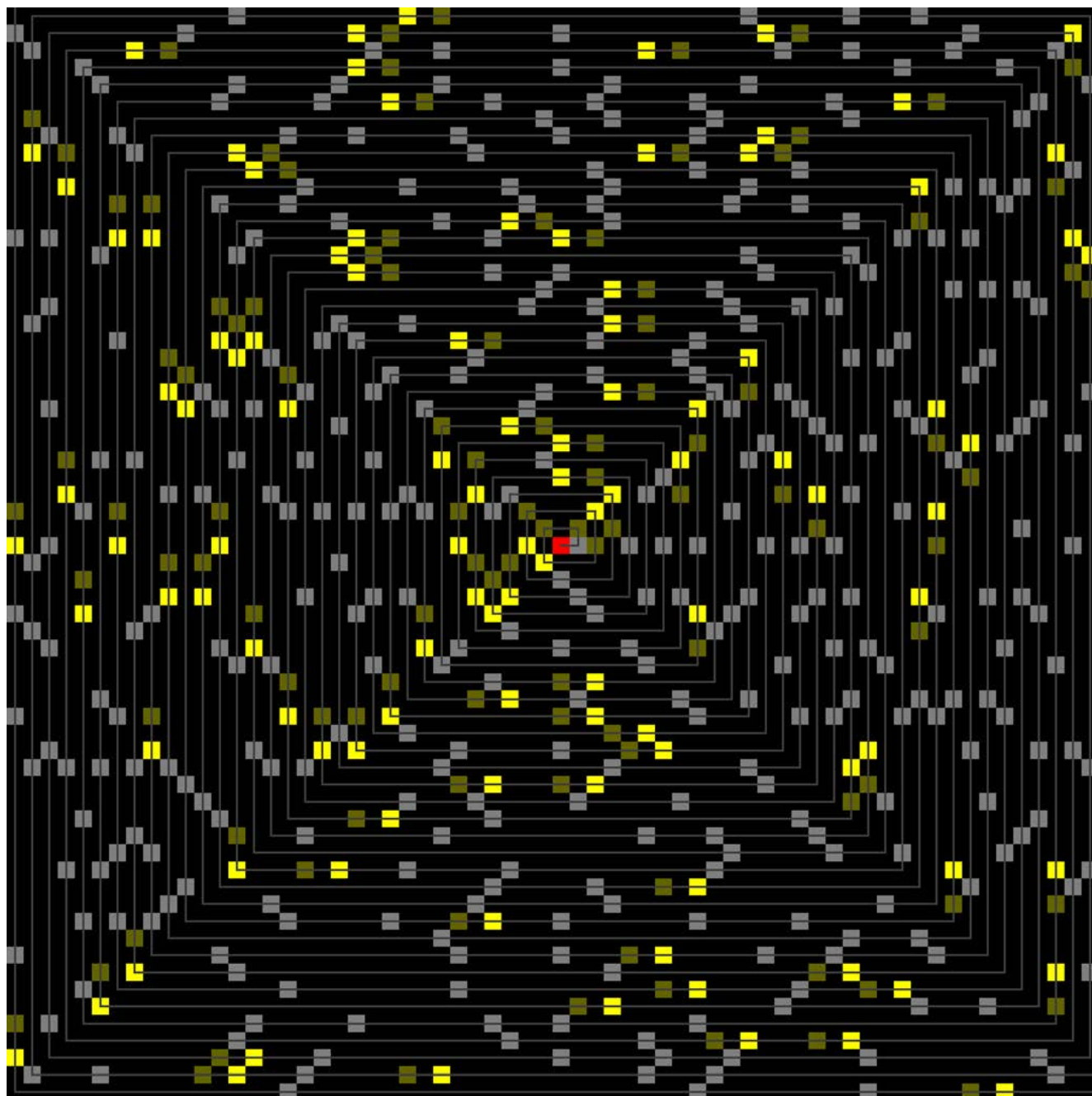
La conjecture des nombres premiers jumeaux est l'un des problèmes non résolus les plus populaires en mathématiques. Des progrès extraordinaires ont été récemment accomplis, mais la route vers une démonstration est encore longue...

P

etit exercice : recherchez tous les nombres premiers inférieurs à 60. Comment avez-vous procédé ? Peut-être avez-vous testé pour chaque nombre s'il était divisible par un autre nombre que lui-même et 1, en faisant appel aux tables de multiplication ou même en utilisant une calculatrice ? Cela fonctionne, mais

c'est long ! Une technique plus rapide est le crible d'Ératosthène. Elle consiste à éliminer, parmi tous les nombres, les multiples de 2, puis de 3, de 5... afin de ne conserver que les nombres premiers. On peut ensuite visualiser la disposition des nombres premiers au sein des nombres entiers de plusieurs manières, l'une des plus originales et surprenante étant la spirale d'Ulam (voir l'encadré page 62).

Grâce au crible ou tout autre moyen, listons les nombres premiers plus petits que 200 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197 et 199. Devant cette liste, on peut s'interroger : existe-t-il une règle permettant de passer d'un nombre premier au suivant ? Par exemple, peut-on connaître le



Jean-François Colonna (CMAP/École Polytechnique, [www.laclanme.polytechnique.fr](http://www.laclanme.polytechnique.fr))

nombre premier qui vient juste après 199 sans tester un par un les nombres qui suivent?

Au fait, est-on sûr qu'un nombre premier vient après 200? Rien *a priori* ne permet de l'affirmer. Bien sûr, en testant 201, 202, 203, 204... et on finit par ajouter 211 à la liste des nombres premiers. Le répit est de courte durée, car la question se repose immédiatement: y a-t-il un nombre premier après 211? Et ainsi de suite... En d'autres termes, la liste des nombres premiers s'arrête-t-elle à un moment donné?

## UNE INFINITÉ DE PREMIERS

La réponse, certaine, est non. On sait prouver, depuis l'Antiquité, que la liste des nombres premiers est infinie. Le réservoir de nombres premiers est donc intarissable. Qu'en est-il alors d'une règle pour passer d'un nombre

Sur cette spirale d'Ulam le long de laquelle les entiers se suivent (1, en rouge), les paires de nombres premiers jumeaux apparaissent en jaune (sombre pour le premier de la paire, et vif pour le second).

premier au suivant? Pour répondre, intéressons-nous à l'écart entre deux nombres premiers consécutifs, par exemple, celui entre 3 et 5 (2), entre 7 et 11 (4), et entre 53 et 59 (6). Cet écart obéit-il à des règles particulières?

À l'exception de 2, tous les nombres premiers sont impairs. Donc l'écart entre deux nombres premiers consécutifs est toujours un nombre pair, sauf bien sûr celui entre 2 et 3.

Et à part ça? Écrivons la liste des écarts successifs entre les nombres premiers consécutifs plus petits que 200: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 2, 4, 14, 4, 6, 8, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2... Aucune logique apparente. On remarque que l'écart le plus fréquent est 2 (il apparaît 16 fois), mais rien ne dit que cette prédominance se maintiendra lorsque l'on poursuivra