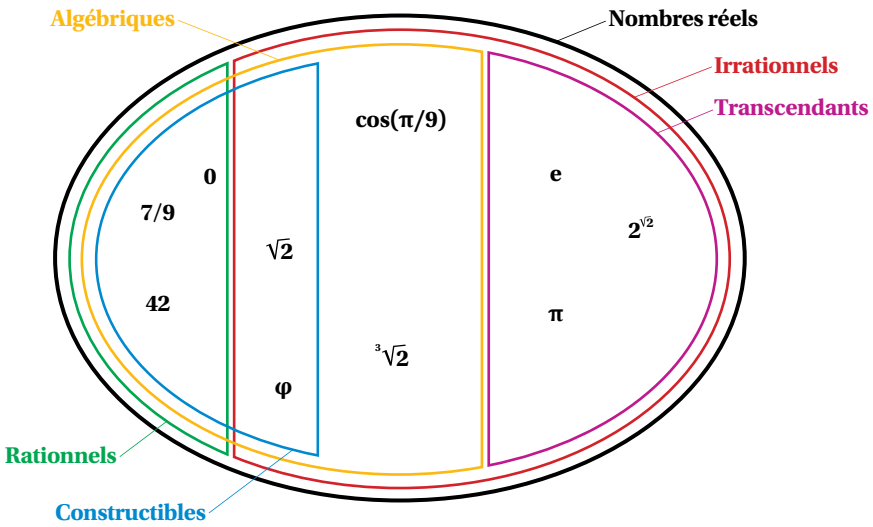
IRRATIONNELS CONSTRUCTIBLES

Un nombre irrationnel constructible peut s'obtenir avec une règle et un compas. C'est le cas du nombre $\sqrt{2}$ découvert par les Grecs, ainsi que du **nombre d'or**.



NOMBRES ALGÉBRIQUES

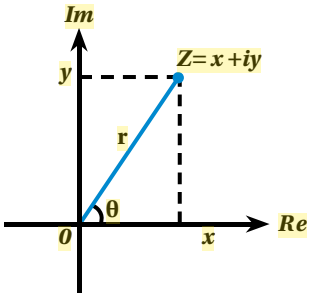
Ces nombres, qui incluent les précédents, sont les solutions des équations polynomiales à coefficients rationnels de la forme $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, tous les a_i appartenant à $\mathbb{Q}$. Par exemple, $\sqrt{2}$ (**constructible**) est solution de $x^2 - 2 = 0$. $(\sqrt[3]{2})/2$ est aussi algébrique, **irrationnel**, mais non constructible.

NOMBRES TRANSCENDANTS

Ces nombres irrationnels ne sont pas solutions d'équations polynomiales à coefficients rationnels. Les plus connus de ces nombres sont π et e. Le nombre de Champernowne 0,12345678910111213... est aussi transcendant. L'existence de tels nombres a été prouvée pour la première fois en 1844 par Joseph Liouville.

NOMBRES COMPLEXES

L'ensemble des nombres complexes est une extension de l'ensemble des **nombres réels**, contenant un nombre imaginaire noté i tel que $i^2 = -1$. Le carré de $(-i)$ est aussi égal à $-1 : (-i)^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme $x + iy$ où x et y sont des nombres réels et nommés respectivement « partie réelle » *(Re)* et « partie imaginaire » *(Im)*. On peut représenter les nombres complexes dans un plan dit complexe avec pour abscisse les parties réelles x et en ordonnées les parties imaginaires y. Un nombre complexe $z = x + iy$ s'écrit aussi sous la forme $z = re^{i\theta}$ ou bien $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ où r est le module de z et θ son argument. Un nombre complexe peut être **algébrique**.



NOMBRES RÉELS

Ces nombres englobent l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels. Ils peuvent avoir une liste finie ou infinie de décimales. L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$. En 1874, Georg Cantor démontra que les nombres **algébriques** réels sont dénombrables et les nombres réels sont non dénombrables.
Les nombres réels sont des nombres **complexes** dont la partie imaginaire est égale à zéro.

π (PI)

Ce nombre a été initialement défini comme le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. Sa valeur approchée est 3,141592653... Il est connu depuis l'Antiquité : dès 2000 avant notre ère, les Babyloniens avaient obtenu pour π une valeur de 3,125. L'ubiquité de π en fait l'une des plus importantes constantes en mathématiques. La **transcendance** de π (qui est par définition non constructible) a permis la prouver l'impossibilité de résoudre la quadrature du cercle.

e

Le nombre *e* (nommé nombre d'Euler ou constante de Néper) est la base des logarithmes népériens (noté ln), c'est-à-dire le nombre défini par $\ln(e) = 1$, ce qui en fait la base de la fonction exponentielle e^x. Euler a défini *e* comme : $1 + 1/1 + 1/(1 \times 2) + 1/(1 \times 2 \times 3) + 1/(1 \times 2 \times 3 \times 4)$... En 1873, Charles Hermite a montré que le nombre *e* est **transcendant**.

NOMBRES *P*-ADIQUES

Ces nombres ont été inventés par Kurt Hensel en 1897 pour mieux comprendre les nombres habituels. Ils sont définis sur la base d'un nombre premier *p*. Par construction, ils peuvent avoir un nombre infini de chiffres à gauche de la virgule.

NOMBRES PREMIERS

Un tel nombre est un entier qui n'a que deux diviseurs, 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37... Ce sont les nombres élémentaires à partir desquels on peut fabriquer tous les autres entiers (en les additionnant ou en les multipliant). Ils sont utiles en cryptographie, car il est très difficile de trouver les facteurs premiers d'un nombre très grand. Le plus grand nombre premier connu est $2^{77\,232\,917} - 1$, qui comporte plus de 23 millions de chiffres en écriture décimale. C'est un nombre de Mersenne, car il est de la forme $2^p - 1$, où p est premier. Beaucoup de conjectures portent sur les nombres premiers.

NOMBRE D'OR (φ)

Le nombre d'or (noté φ), aussi nommé section dorée, proportion dorée et divine proportion, a été défini comme l'unique rapport a/b entre deux longueurs a et b telles que $(a+b)/a = a/b$. Ce nombre **irrationnel** est l'unique solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Il vaut environ 1,618... On le retrouve dans la suite de Fibonacci, les pavages quasi-périodiques. Il était probablement connu dès l'Antiquité, en particulier par les pythagoriciens, et on le retrouve dans les *Éléments* d'Euclide.