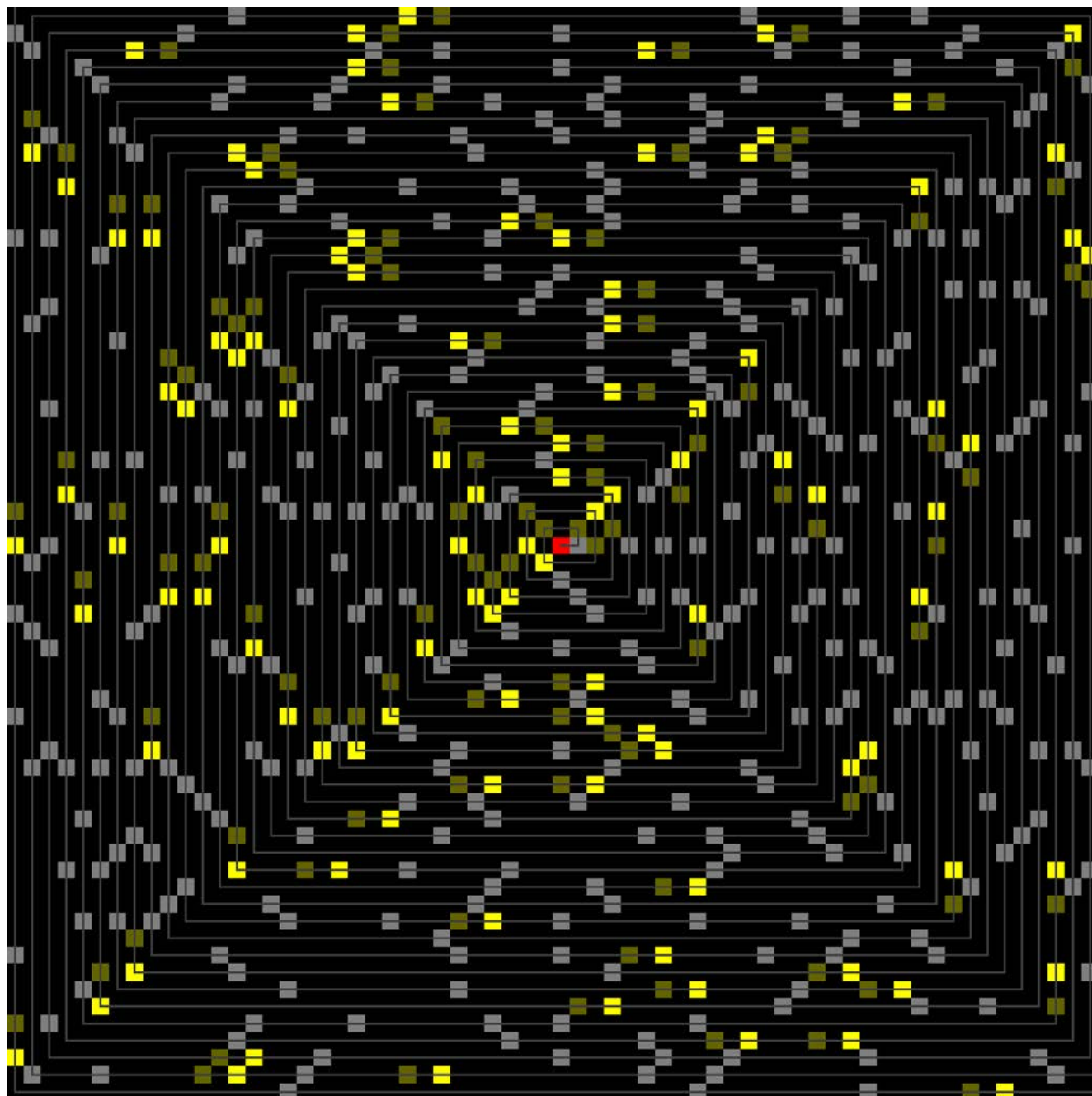




Jean-François Colonna (CMAP/École Polytechnique, www.laclamme.polytechnique.fr)

nombre premier qui vient juste après 199 sans tester un par un les nombres qui suivent?

Au fait, est-on sûr qu'un nombre premier vient après 200? Rien *a priori* ne permet de l'affirmer. Bien sûr, en testant 201, 202, 203, 204... et on finit par ajouter 211 à la liste des nombres premiers. Le répit est de courte durée, car la question se repose immédiatement: y a-t-il un nombre premier après 211? Et ainsi de suite... En d'autres termes, la liste des nombres premiers s'arrête-t-elle à un moment donné?

UNE INFINITÉ DE PREMIERS

La réponse, certaine, est non. On sait prouver, depuis l'Antiquité, que la liste des nombres premiers est infinie. Le réservoir de nombres premiers est donc intarissable. Qu'en est-il alors d'une règle pour passer d'un nombre

Sur cette spirale d'Ulam le long de laquelle les entiers se suivent (1, en rouge), les paires de nombres premiers jumeaux apparaissent en jaune (sombre pour le premier de la paire, et vif pour le second).

premier au suivant? Pour répondre, intéressons-nous à l'écart entre deux nombres premiers consécutifs, par exemple, celui entre 3 et 5 (2), entre 7 et 11 (4), et entre 53 et 59 (6). Cet écart obéit-il à des règles particulières?

À l'exception de 2, tous les nombres premiers sont impairs. Donc l'écart entre deux nombres premiers consécutifs est toujours un nombre pair, sauf bien sûr celui entre 2 et 3.

Et à part ça? Écrivons la liste des écarts successifs entre les nombres premiers consécutifs plus petits que 200: 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 2, 4, 14, 4, 6, 8, 2, 10, 2, 6, 6, 4, 6, 6, 2, 10, 2, 4, 2... Aucune logique apparente. On remarque que l'écart le plus fréquent est 2 (il apparaît 16 fois), mais rien ne dit que cette prédominance se maintiendra lorsque l'on poursuivra

➤ la liste. Et d'ailleurs, est-on certain de voir apparaître le nombre 2 une 17^e fois? une 18^e? et ainsi de suite? Autrement dit: est-on certain de continuer inexorablement à rencontrer des nombres premiers consécutifs avec un écart de 2 comme 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31, 41 et 43? De tels nombres sont des nombres premiers jumeaux. Nouvelle question: la liste des nombres premiers jumeaux s'arrête-t-elle?

On l'ignore. Les mathématiciens penchent pour la négative, et misent sur une infinité de nombres premiers jumeaux, mais personne n'est en mesure d'en donner une preuve irréfutable! Pourtant ce n'est pas faute d'avoir essayé. Si l'origine exacte de ce problème n'est pas certaine (la source la plus ancienne serait un article du mathématicien français Alphonse de Polignac écrit en 1849), on peut dire qu'il est l'objet de recherches intensives depuis plus de cent ans. C'est dire la difficulté!

Pour aborder ce problème, une première idée est de dire que nous ne sommes pas allés suffisamment loin dans l'expérimentation: nous n'avons observé que les nombres premiers jusqu'à 200. Avec un ordinateur, on peut aller bien au-delà et se faire une idée peut-être plus précise de l'évolution de la quantité de nombres premiers et des écarts entre nombres premiers consécutifs à mesure que l'on observe des nombres de plus en plus grands.

Une autre idée est d'examiner très attentivement les preuves connues de l'infinitude des nombres premiers, puis tenter d'adapter l'une de ces preuves pour en extraire des informations sur la liste des nombres premiers jumeaux.

Explorons d'abord la première piste, avec un ordinateur, pour aller au-delà de 200, par exemple jusqu'à 1 000 000. Les résultats: il y a 78 948 nombres premiers plus petits que 1 000 000. Et 8 169 paires de nombres premiers jumeaux parmi eux. C'est «beaucoup», mais ces chiffres seuls ne nous apprennent pas grand-chose. Il se pourrait par exemple que ces 78 948 nombres premiers soient tous situés entre 1 et 500 000 et qu'entre 500 000 et 1 000 000, il n'y en ait aucun, ce qui laisserait présager qu'au-delà de 500 000 il n'y a plus de nombres premiers.

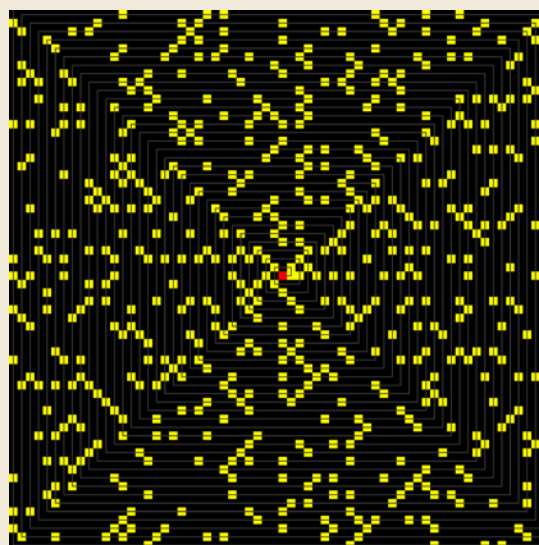
L'ESCALIER DES PREMIERS

Il est plus intéressant de suivre l'évolution de la quantité de nombres premiers rencontrés à mesure que nous progressons dans la suite des nombres entiers. Pour le visualiser, imaginons un promeneur qui avance sur un axe horizontal indexé par les nombres entiers. Dès qu'il tombe sur un nombre premier, il s'élève d'une marche, puis poursuit sa trajectoire à l'horizontale jusqu'à ce qu'il rencontre le nombre premier suivant. La hauteur à laquelle se trouve le promeneur

LA SPIRALE D'ULAM

37	—	36	—	35	—	34	—	33	—	32	—	31
38		17	—	16	—	15	—	14	—	13		30
39		18		15	—	4	—	3		12		29
40		19		6		1	—	2		11		28
41		20		7	—	8	—	9	—	10		27
42		21	—	22	—	23	—	24	—	25	—	26
43	—	44	—	45	—	46	—	47	—	48	—	49

La légende raconte qu'un jour, s'ennuyant ferme lors d'une conférence, le mathématicien d'origine polonaise Stanisław Ulam, passa le temps en inscrivant sur un papier les entiers selon une spirale.



En entourant les nombres premiers, il eut la surprise de les voir s'aligner, pour certains, le long de diagonales. Il y aurait donc un semblant de régularité, partielle, dans la répartition des nombres premiers.