

- la liste. Et d'ailleurs, est-on certain de voir apparaître le nombre 2 une 17^e fois? une 18^e? et ainsi de suite? Autrement dit: est-on certain de continuer inexorablement à rencontrer des nombres premiers consécutifs avec un écart de 2 comme 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, 17 et 19, 29 et 31, 41 et 43? De tels nombres sont des nombres premiers jumeaux. Nouvelle question: la liste des nombres premiers jumeaux s'arrête-t-elle?

On l'ignore. Les mathématiciens penchent pour la négative, et misent sur une infinité de nombres premiers jumeaux, mais personne n'est en mesure d'en donner une preuve irréfutable! Pourtant ce n'est pas faute d'avoir essayé. Si l'origine exacte de ce problème n'est pas certaine (la source la plus ancienne serait un article du mathématicien français Alphonse de Polignac écrit en 1849), on peut dire qu'il est l'objet de recherches intensives depuis plus de cent ans. C'est dire la difficulté!

Pour aborder ce problème, une première idée est de dire que nous ne sommes pas allés suffisamment loin dans l'expérimentation: nous n'avons observé que les nombres premiers jusqu'à 200. Avec un ordinateur, on peut aller bien au-delà et se faire une idée peut-être plus précise de l'évolution de la quantité de nombres premiers et des écarts entre nombres premiers consécutifs à mesure que l'on observe des nombres de plus en plus grands.

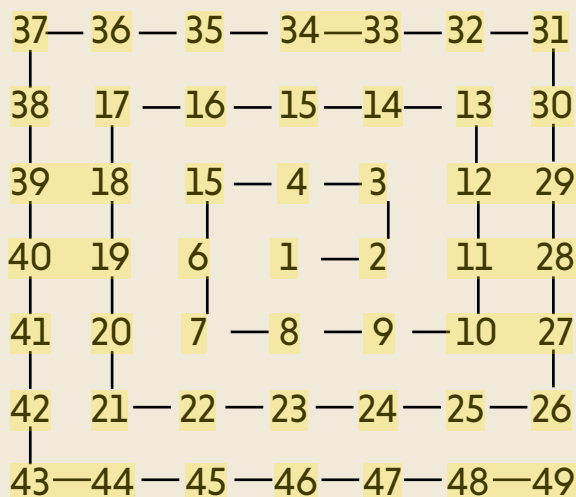
Une autre idée est d'examiner très attentivement les preuves connues de l'infinitude des nombres premiers, puis tenter d'adapter l'une de ces preuves pour en extraire des informations sur la liste des nombres premiers jumeaux.

Explorons d'abord la première piste, avec un ordinateur, pour aller au-delà de 200, par exemple jusqu'à 1 000 000. Les résultats: il y a 78 948 nombres premiers plus petits que 1 000 000. Et 8 169 paires de nombres premiers jumeaux parmi eux. C'est «beaucoup», mais ces chiffres seuls ne nous apprennent pas grand-chose. Il se pourrait par exemple que ces 78 948 nombres premiers soient tous situés entre 1 et 500 000 et qu'entre 500 000 et 1 000 000, il n'y en ait aucun, ce qui laisserait présager qu'au-delà de 500 000 il n'y a plus de nombres premiers.

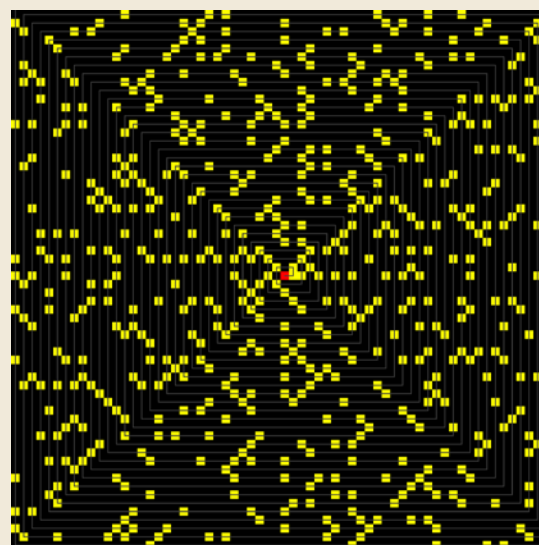
L'ESCALIER DES PREMIERS

Il est plus intéressant de suivre l'évolution de la quantité de nombres premiers rencontrés à mesure que nous progressons dans la suite des nombres entiers. Pour le visualiser, imaginons un promeneur qui avance sur un axe horizontal indexé par les nombres entiers. Dès qu'il tombe sur un nombre premier, il s'élève d'une marche, puis poursuit sa trajectoire à l'horizontale jusqu'à ce qu'il rencontre le nombre premier suivant. La hauteur à laquelle se trouve le promeneur

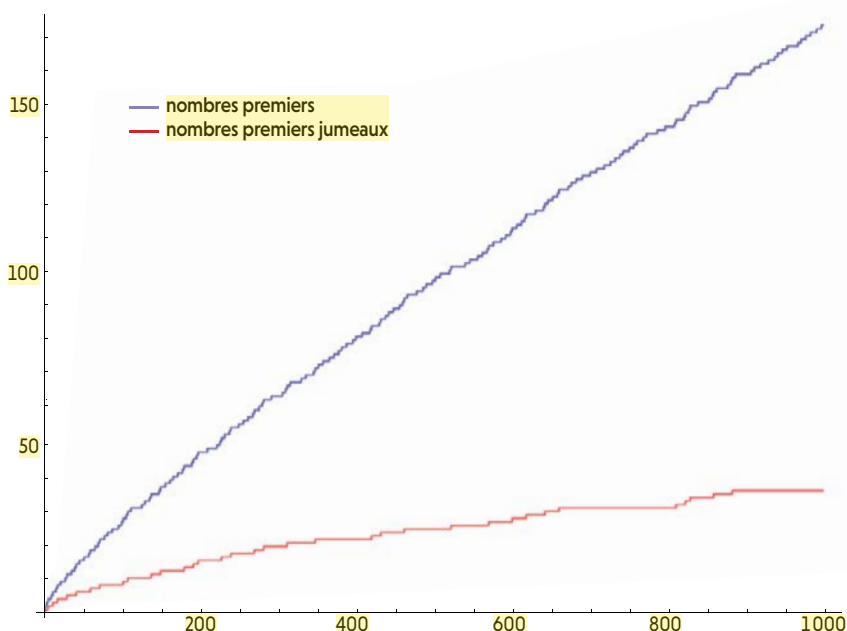
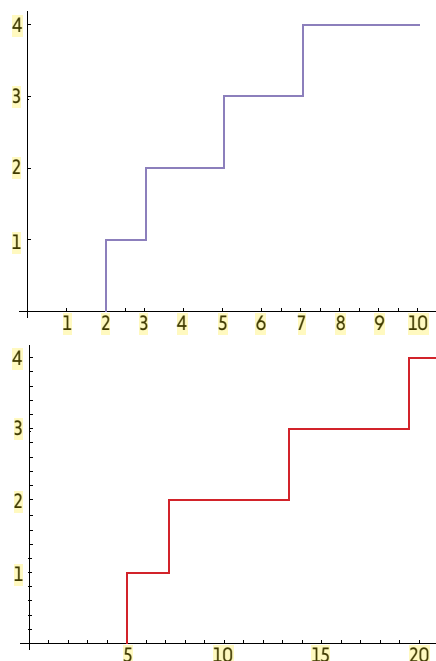
LA SPIRALE D'ULAM



La légende raconte qu'un jour, s'ennuyant ferme lors d'une conférence, le mathématicien d'origine polonaise Stanisław Ulam, passa le temps en inscrivant sur un papier les entiers selon une spirale.



En entourant les nombres premiers, il eut la surprise de les voir s'aligner, pour certains, le long de diagonales. Il y aurait donc un semblant de régularité, partielle, dans la répartition des nombres premiers.



correspond donc à la quantité de nombres premiers rencontrés depuis le début du parcours (voir la figure ci-dessus).

Au début (jusqu'à 10), les marches sont disposées de façon assez irrégulière, exactement comme le laisse prévoir la disposition d'apparence désordonnée des nombres premiers. Cependant, à mesure que l'on progresse vers 100, 1000... 1000000, et que l'on recule pour embrasser l'escalier du regard, l'ascension prend l'allure d'une courbe qui croît régulièrement et semble se confondre avec une droite : étonnant ! Cela signifierait-il que la quantité de nombres premiers rencontrés évolue à une vitesse quasi constante ? Y a-t-il autant de nombres premiers entre 1000 et 10000 qu'entre 10000 et 20000 ? entre 20000 et 30000 ?

Il n'en est rien. Voici quelques chiffres. On compte 1229 nombres premiers entre 1 et 10 000, 1033 entre 10000 et 20000, 983 entre 20000 et 30000, 958 entre 30000 et 40000. On devine un phénomène intrigant : on rencontre de moins en moins de nombres premiers. D'autres chiffres abondent dans ce sens. On croise 25 nombres premiers, soit 25 %, entre 1 et 100, 170 (17 %) entre 1 et 1000, 78498 (environ 7,8 %) entre 1000 et 1000000...

La proportion de nombres premiers rencontrés semble donc diminuer progressivement à mesure que l'on parcourt la suite des nombres entiers. Autrement dit les nombres premiers semblent se raréfier ! Chose extraordinaire, on sait démontrer que ce phénomène de raréfaction a bien lieu. Mieux, il peut être quantifié grâce à une célèbre fonction des mathématiques, le logarithme népérien noté $\ln$, introduit dans un tout autre but par John Napier au XVII^e siècle. En effet,

Les nombres premiers (en bleu) et les nombres premiers jumeaux (en rouge) semblent au départ progresser de façon erratique (en haut), mais avec du recul (en bas), on devine une certaine régularité.

en mettant en œuvre des idées lumineuses exposées par Riemann en 1852, Hadamard et La Vallée-Poussin ont démontré indépendamment en 1896 qu'à mesure que x croît, le nombre de nombres premiers plus petits que x , souvent noté $\pi(x)$, tend à se comporter comme $x/\ln x$ (plus précisément, le rapport des deux tend vers 1). Ce magnifique résultat porte le nom de «Théorème des nombres premiers», il établit avec certitude que les nombres premiers se raréfient et précise à quelle vitesse. Étudier plus précisément l'écart entre $\pi(x)$ et $x/\ln(x)$ est une question fascinante et difficile, liée à l'un des problèmes ouverts les plus importants en mathématiques, connu sous le nom d'hypothèse de Riemann (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68).

Retenons en définitive que le nombre de nombres premiers progresse avec une certaine régularité, pour peu que l'on s'aventure vers des nombres suffisamment grands. La succession des nombres premiers paraissait imprévisible, et voilà qu'avec un peu de recul, la répartition des nombres premiers ne paraît plus si chaotique !

DU CÔTÉ DES Jumeaux...

On peut s'intéresser aux nombres premiers jumeaux avec la même approche, celle de l'escalier où chaque marche correspond à une paire de nombres premiers jumeaux. Échauffons-nous doucement. Jusqu'à 20, le nouvel escalier s'est élevé de quatre marches, ce qui correspond aux quatre premières paires (3, 5), (5, 7), (11, 13) et (17, 19) de nombres premiers jumeaux.

À mesure que l'on parcourt les entiers, l'escalier des nombres premiers jumeaux semble davantage irrégulier que celui des nombres premiers (voir la figure ci-dessus). Il comporte