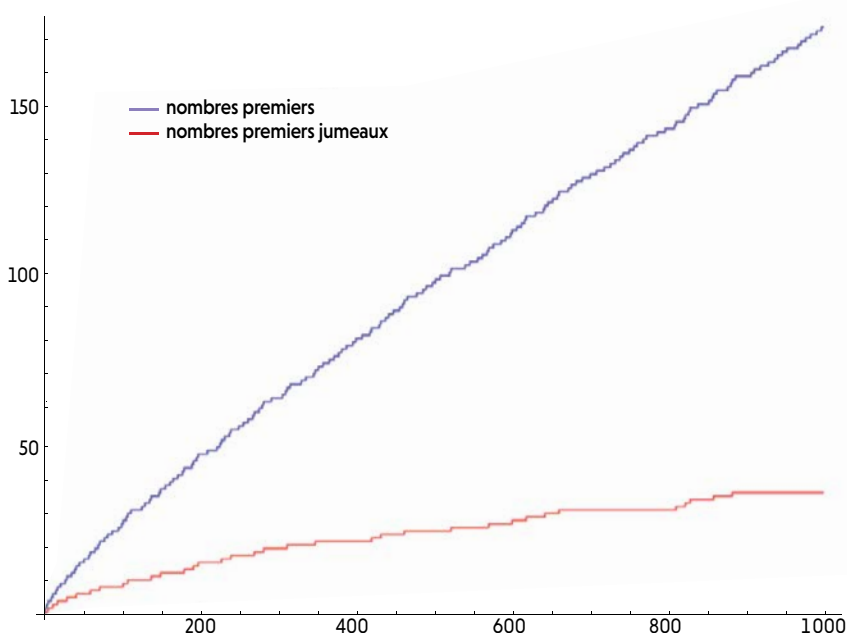
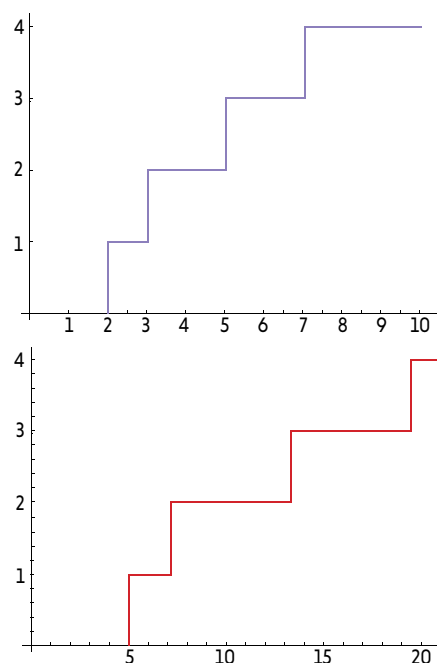




correspond donc à la quantité de nombres premiers rencontrés depuis le début du parcours (voir la figure ci-dessus).

Au début (jusqu'à 10), les marches sont disposées de façon assez irrégulière, exactement comme le laisse prévoir la disposition d'apparence désordonnée des nombres premiers. Cependant, à mesure que l'on progresse vers 100, 1000... 1000000, et que l'on recule pour embrasser l'escalier du regard, l'ascension prend l'allure d'une courbe qui croît régulièrement et semble se confondre avec une droite : étonnant ! Cela signifierait-il que la quantité de nombres premiers rencontrés évolue à une vitesse quasi constante ? Y a-t-il autant de nombres premiers entre 1000 et 10000 qu'entre 10000 et 20000 ? entre 20000 et 30000 ?

Il n'en est rien. Voici quelques chiffres. On compte 1229 nombres premiers entre 1 et 10 000, 1033 entre 10000 et 20000, 983 entre 20000 et 30000, 958 entre 30000 et 40000. On devine un phénomène intrigant : on rencontre de moins en moins de nombres premiers. D'autres chiffres abondent dans ce sens. On croise 25 nombres premiers, soit 25 %, entre 1 et 100, 170 (17 %) entre 1 et 1000, 78498 (environ 7,8 %) entre 1000 et 1000000...

La proportion de nombres premiers rencontrés semble donc diminuer progressivement à mesure que l'on parcourt la suite des nombres entiers. Autrement dit les nombres premiers semblent se raréfier ! Chose extraordinaire, on sait démontrer que ce phénomène de raréfaction a bien lieu. Mieux, il peut être quantifié grâce à une célèbre fonction des mathématiques, le logarithme népérien noté $\ln$, introduit dans un tout autre but par John Napier au XVII^e siècle. En effet,

Les nombres premiers (en bleu) et les nombres premiers jumeaux (en rouge) semblent au départ progresser de façon erratique (en haut), mais avec du recul (en bas), on devine une certaine régularité.

en mettant en œuvre des idées lumineuses exposées par Riemann en 1852, Hadamard et La Vallée-Poussin ont démontré indépendamment en 1896 qu'à mesure que x croît, le nombre de nombres premiers plus petits que x , souvent noté $\pi(x)$, tend à se comporter comme $x/\ln x$ (plus précisément, le rapport des deux tend vers 1). Ce magnifique résultat porte le nom de «Théorème des nombres premiers», il établit avec certitude que les nombres premiers se raréfient et précise à quelle vitesse. Étudier plus précisément l'écart entre $\pi(x)$ et $x/\ln(x)$ est une question fascinante et difficile, liée à l'un des problèmes ouverts les plus importants en mathématiques, connu sous le nom d'hypothèse de Riemann (voir *L'hypothèse qui valait un million*, par P. Meier, page 68).

Retenons en définitive que le nombre de nombres premiers progresse avec une certaine régularité, pour peu que l'on s'aventure vers des nombres suffisamment grands. La succession des nombres premiers paraissait imprévisible, et voilà qu'avec un peu de recul, la répartition des nombres premiers ne paraît plus si chaotique !

DU CÔTÉ DES Jumeaux...

On peut s'intéresser aux nombres premiers jumeaux avec la même approche, celle de l'escalier où chaque marche correspond à une paire de nombres premiers jumeaux. Échauffons-nous doucement. Jusqu'à 20, le nouvel escalier s'est élevé de quatre marches, ce qui correspond aux quatre premières paires (3, 5), (5, 7), (11, 13) et (17, 19) de nombres premiers jumeaux.

À mesure que l'on parcourt les entiers, l'escalier des nombres premiers jumeaux semble davantage irrégulier que celui des nombres premiers (voir la figure ci-dessus). Il comporte

> quelques marches relativement longues, sortes de déserts de nombres premiers jumeaux. L'allure laisse même penser que le nombre de nombres premiers jumeaux ne va pas dépasser 50! Se dirige-t-on vers une extinction des nombres premiers jumeaux?

Non. En atteignant 1000000, on constate que l'escalier des nombres premiers jumeaux continue de s'élever, lentement mais apparemment sûrement. Il semble raisonnable de conjecturer que la liste des nombres premiers jumeaux ne s'arrête jamais. Et parmi les nombres premiers, quelle est la proportion de nombres premiers jumeaux? Et comment évolue cette proportion?

À l'instar des nombres premiers parmi les entiers, les nombres premiers jumeaux se raréfient au sein des nombres premiers. Qui plus est, ce comportement semble lui aussi relié à la fonction logarithme népérien. Seulement voilà, dans le cas des nombres premiers jumeaux, on ne dispose d'aucune démonstration à l'appui de ces observations. Rien ne nous permet de garantir que ces phénomènes (apparition de nombres premiers jumeaux, leur raréfaction...) perdurent indéfiniment.

... ET DES COUSINS SEXY

Nous en sommes venus à parler des nombres premiers jumeaux après avoir observé le caractère en apparence aléatoire des écarts entre nombres premiers successifs. Que se passe-t-il pour les nombres premiers consécutifs distants de 4 (les nombres premiers cousins)? de 6 (les nombres premiers sexy)? Ces deux listes sont-elles aussi infinies? Là encore, on pense que c'est le cas, mais le mystère plane tout autant.

On peut aussi se poser la question: y a-t-il plus de nombres premiers jumeaux ou de nombres premiers cousins, c'est-à-dire plus souvent des sauts de 2 ou de 4? Jusqu'à 1000, les escaliers correspondant aux nombres premiers jumeaux et aux nombres premiers

cousins se dépassent mutuellement à plusieurs reprises (voir la figure ci-dessous). Ce phénomène de chevauchement se poursuit-il? Avec plus de marches (jusqu'à 1000000), les deux courbes semblent confondues! En zoomant, on observerait que les deux courbes semblent poursuivre ce jeu de dépassements successifs.

Qu'en est-il lorsque les nombres premiers sexy sont de la partie? Ils sont légèrement en tête à 1000 et s'imposent définitivement, et de manière très nette, au-delà. Entre les écarts 2, 4 et 6, ce dernier serait ainsi prépondérant. Nous pourrions poursuivre nos observations et multiplier les conjectures, sur la base de calculs numériques, en nous intéressant à tous les écarts possibles (tous les nombres pairs!). Privilégions plutôt un détour par les probabilités.

Dans ce domaine, les mathématiciens partent d'un constat audacieux: certes, la répartition des nombres premiers est parfaitement déterminée par leur définition, mais cette répartition n'est finalement pas si éloignée de ce que l'on obtiendrait en jouant à la loterie pour savoir quel nombre est premier.

Pas n'importe quelle loterie bien sûr! Le fonctionnement schématique est le suivant: on connaît la proportion de nombres premiers entre 1 et disons 1000000, soit environ 7,8%. Imaginez alors que pour chaque nombre, on tire à pile ou face pour décider son statut, premier ou pas, sachant que notre pièce est truquée de façon à donner pile dans seulement 7,8% des cas. Notre loterie est en fait un peu plus compliquée car on ne veut pas se limiter à 1000000, et elle fait intervenir le logarithme.

À partir de cette hypothèse d'apparence farfelue, les mathématiciens se livrent à des calculs de probabilité, relativement aisés, et aboutissent à des formules qui sont généralement en accord avec les expérimentations numériques: incroyable!

Pour résumer, tout se passe comme si les mathématiciens, partant d'une observation erronée, mais pas si éloignée de la réalité,

La progression relative des nombres premiers jumeaux (en rouge), cousins (en vert) et sexy (en violet) semble incertaine au départ (à gauche). Les choses s'éclaircissent (à droite): les sexy l'emportent largement.

