

indépendamment du fait que l'aléa sous-jacent soit sage ou sauvage, la moyenne ou l'écart-type d'un échantillon ne sont tout simplement pas les indicateurs pertinents, même si on peut les estimer avec précision.

Il en est ainsi des études de fiabilité, où, pour déterminer la probabilité de défaillance d'un système, on cherche à estimer celle de son «maillon le plus faible». Par exemple, pour choisir la dimension et les caractéristiques d'un barrage, il faut avoir une idée précise de la pression maximale que l'ouvrage pourra être amené à supporter, et non de la pression moyenne qu'il subira en conditions normales. Pour cela, il faut caractériser directement les valeurs extrêmes dans l'échantillon d'observations. Les notions d'écart-type, de moyenne et le théorème de la limite centrale ne sont alors pas d'un grand secours...

Parallèlement aux travaux de Lévy sur le théorème de la limite centrale, un groupe de statisticiens, dont sir Ronald Fisher et Leonard

Tippett en Grande-Bretagne, Boris Gnedenko en Union soviétique, Maurice Fréchet en France et Ludwig von Mises en Autriche, ainsi qu'Emil Julius Gumbel, mathématicien allemand réfugié en France, développaient une nouvelle branche des statistiques dont le but est d'étudier non plus les valeurs moyennes des échantillons, mais leurs valeurs extrêmes, c'est-à-dire maximales ou minimales.

De même que le théorème de la limite centrale décrit le comportement de la moyenne d'un grand échantillon, cette théorie des valeurs extrêmes décrit le comportement du maximum d'un échantillon. Ces statisticiens ont montré que, selon la nature de la variable aléatoire étudiée, la valeur maximale de l'échantillon ne peut obéir qu'à l'une parmi trois distributions différentes : les distributions de Fréchet, de Gumbel ou de Weibull (voir l'encadré ci-contre).

Comme la loi normale et la loi de Lévy, qui sont des candidats naturels pour modéliser les sommes de variables indépendantes, les lois de valeurs extrêmes sont des candidats privilégiés pour la modélisation des valeurs maximales d'un échantillon. Gumbel présenta en 1941 une application de ces concepts à l'analyse statistique des crues fluviales. Cette théorie allait être mise en application dans un contexte dramatique.

LES LOIS DE VALEURS EXTRÊMES



Considérons un échantillon $x_1, x_2, \dots, x_n$ de tirages indépendants d'une distribution de probabilité G . La théorie des valeurs extrêmes s'intéresse au comportement de la valeur maximale $U_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ d'un échantillon de grande taille (n grand). Un des résultats fondamentaux de la théorie, le théorème de Fisher-Tippett-Gnedenko, montre que s'il existe des constantes de normalisation a_n et b_n telles que la distribution de $(U_n - a_n)/b_n$ ait une limite quand n tend vers l'infini, alors la distribution limite de la suite normalisée de maxima des variables aléatoires est nécessairement de la forme :

$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\}$$

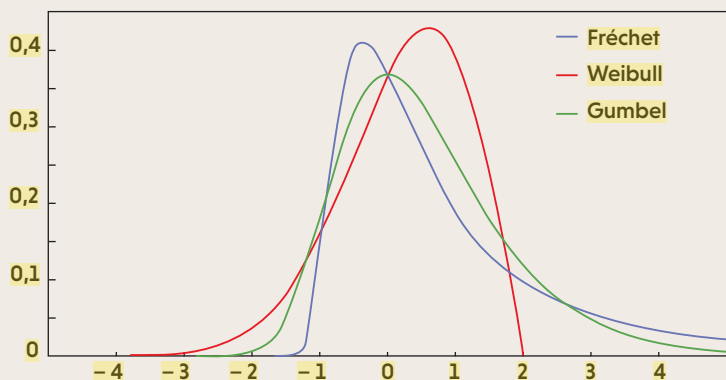
définie pour $1 + \xi(x - \mu)/\sigma > 0$, et $\sigma > 0$.

On distingue alors trois cas.

Le premier, quand $\xi < 0$, nommé distribution de Weibull, décrit le cas où les variables x_i sont bornées.

Le second, lorsque $\xi = 0$, correspond à la distribution de Gumbel. Elle est au maximum d'un échantillon ce que la loi normale est à la moyenne : elle représente le cas où le hasard décrit par la distribution G est sage.

Enfin, si les variables x_i suivent une loi de Pareto d'exposant α , alors $\xi = 1/\alpha > 0$. La distribution, dite de Fréchet, décrit le maximum d'un échantillon qui obéit au hasard sauvage. Plus ξ est grand, plus la queue de distribution est importante, c'est-à-dire plus les événements extrêmes sont fréquents. Ces trois lois de probabilité sont adaptées aux distributions de valeurs extrêmes.



APPRIVOISER LA RARETÉ... ET LA MER

Les Pays-Bas ont toujours vécu sous la menace de la montée des eaux. Les nombreuses digues qui parsemaient le pays ont longtemps suffi à le protéger. Mais dans la nuit du 31 janvier au 1^{er} février 1953, une montée des eaux due à une tempête eut raison de leur résistance et submergea le Sud-Ouest du pays, tuant plus de 1800 personnes et des milliers de têtes de bétail.

Sous le choc, le gouvernement néerlandais lança peu après un vaste projet de construction de barrages. La commission chargée de revoir les normes de sécurité exigea de fixer la hauteur des digues de façon à ce que la probabilité que la marée les dépasse soit inférieure à 1/10000. Une équipe de scientifiques, armée de la récente théorie des valeurs extrêmes, se mit alors à étudier marées et crues passées afin d'estimer la distribution de probabilité de la hauteur maximale des inondations. Ils montrèrent qu'elle suit une loi de Gumbel, et que la hauteur requise dépassait 5 mètres, une nette augmentation par rapport aux digues de l'époque. Sur la base de ces estimations, d'énormes barrages furent construits (voir la photo page 26) ; ces édifices protègent encore le pays aujourd'hui.

Dans une ambiance de foi grandissante dans les méthodes quantitatives, la théorie des valeurs extrêmes fut par la suite appliquée aux

> assurances, à la gestion des risques financiers et celle des risques environnementaux. Les assureurs l'utilisent par exemple pour estimer les plus grosses pertes qu'ils peuvent subir en vendant des assurances contre les catastrophes naturelles.

Le scénario catastrophe par excellence étant l'explosion d'une centrale nucléaire, toutes les idées sur la mesure des risques extrêmes ont trouvé tôt ou tard un terrain d'application dans le domaine de la sûreté nucléaire. Dans les années 1970, sont apparues les études probabilistes de sûreté (EPS), une méthodologie d'estimation de la probabilité des scénarios d'accident dans les installations nucléaires. La méthode consiste à identifier les séquences d'événements pouvant mener à un résultat catastrophique, telle la fusion du cœur de réacteur; et assigner des probabilités à ces séquences à partir de principes physiques ou de l'expérience acquise. L'objectif, comme pour les digues hollandaises, est de définir les normes à satisfaire pour garantir une probabilité d'occurrence de l'événement catastrophique inférieure à un seuil donné.

Mais en 1979, l'accident de la centrale nucléaire de Three Mile Island, en Pennsylvanie, aux États-Unis, rappela brutalement que, dans un système complexe formé de multiples composantes interdépendantes comme une centrale nucléaire, une petite erreur – humaine en l'occurrence – peut provoquer une catastrophe (voir la figure pages 20-21).

Or l'occurrence de telles erreurs, qui ne sont pas liées à un facteur physique obéissant à une loi bien identifiée, est difficile, voire impossible, à quantifier. Dès lors, quelle foi accorder aux « certitudes quantitatives » produites par les études de sûreté et sur les certifications techniques qui en résultent ?

Frank Knight, économiste américain et théoricien du risque, distinguait déjà en 1921 dans *Risk, Uncertainty and Profit* le risque probabilisable, correspondant à des événements dont on peut évaluer la probabilité avec une certitude raisonnable, et l'incertitude, qui recouvre des événements dont on ignore jusqu'aux probabilités d'occurrence. Lorsqu'on s'éloigne des systèmes physiques pour aller vers des domaines où les facteurs humains sont plus importants, la part de l'incertitude augmente.

Données d'observation incomplètes, hypothèses abusivement simplificatrices (telle l'indépendance des facteurs de risques, fréquemment postulée dans les modèles statistiques), ou encore omission de certains facteurs de risque, les sources d'incertitudes dans les modèles de risque sont nombreuses. Elles sont autant de limitations qui invitent à rester modestes dans nos attentes envers les modèles statistiques lorsque ceux-ci ne s'appuient pas sur des principes physiques bien ancrés.

LA CHASSE AU CYGNE NOIR

Que faire alors ? Tout au plus peut-on compléter les résultats des modèles par l'analyse au cas par cas de scénarios extrêmes. C'est l'objet de la méthode de *stress test*, qui apporte un complément utile aux analyses statistiques de risque. Le CEA et EDF ont retenu cette option en complément des études EPS pour définir la politique de sûreté nucléaire.

Les statistiques montrent là leurs limites. Faut-il pour autant abandonner l'ambition de quantifier les événements rares en dehors des sciences physiques, où les principes physiques permettent de calculer leurs probabilités ?

C'est ce que certains semblent suggérer, tels Nassim Taleb ou Nicolas Bouleau, de l'École nationale des ponts et chaussées, à la

Le barrage d'Oosterschelde, aux Pays-Bas, a été conçu pour que la probabilité qu'une marée le dépasse soit inférieure à 1/10 000. La théorie des valeurs extrêmes indiqua que la hauteur des digues devait être de 5 mètres au moins.

