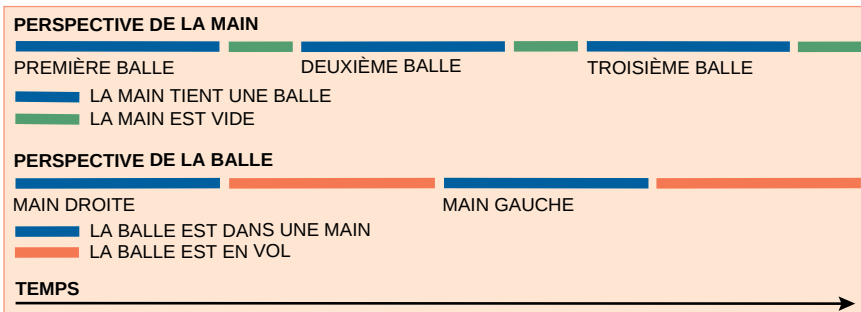




3. LE THÉORÈME DE LA JONGLERIE, proposé par Claude Shannon, de l'Institut de technologie du Massachusetts, est schématisé pour la cascade à trois balles. L'équation exacte est $(T + B)M = (V + B)N$, où T est le temps passé par une balle en vol, B est le temps qu'une balle passe dans la main, V est le temps pendant lequel une main est vide, N est le nombre de balles avec lesquelles on jongle, et M est le nombre de mains. On peut montrer le théorème en suivant un cycle complet à partir du point de vue de la main, puis de la balle, et en mettant ensuite les deux en équation.

cuter des figures enchaînées.

Les jongleurs contrôlent mieux les lancers que les rattrapages, cherchant à obtenir des angles, des vitesses de lancement, des positions et des hauteurs de lancers précis. Conformément au théorème de Shannon, ce qu'on nomme le «rapport d'arrêt» associé à une hauteur de lancer est une mesure essentielle de la vitesse d'exécution : c'est la proportion du temps pendant lequel une main tient une balle entre deux rattrapages (ou lancers). Généralement, quand ce rapport est grand, la probabilité de collision dans l'air est faible, car alors la main tient la balle pendant un temps relativement long, et a donc la possibilité de lancer de manière précise. En revanche, quand le rapport d'arrêt est faible, le nombre moyen de balles en l'air est important, ce qui facilite les corrections, puisque les mains disposent de plus de temps pour se replacer. Dans ce cas, la probabilité de collision augmente.

Les jongleurs débutants doivent choisir des rapports d'arrêt notables, afin d'améliorer la précision de leurs lancers. Les jongleurs plus expérimentés privilégient des rapports d'arrêt inférieurs, particulièrement lorsqu'ils jonglent avec trois balles, car ils ont ainsi une plus grande liberté de modifier la figure exécutée. Les mesures effectuées par l'un d'entre nous (P. Beek) démontrent que le rapport d'arrêt retenu dans la figure de la cascade est compris entre 0,5 et 0,8, avec des valeurs fréquemment proches de $3/4$, $2/3$ ou $5/8$. Autrement dit, dans une cascade à trois balles, les balles peuvent passer deux fois plus de temps en l'air que dans les mains. Une telle proportion indiquerait que les jongleurs parviennent à un équilibre entre

les exigences conflictuelles de stabilité et de flexibilité, corrigeant les erreurs et les perturbations extérieures. En outre, la tendance des rapports d'arrêt à être des fractions simples révèle une tendance humaine à rechercher des solutions rythmiques à des tâches physiques.

La jonglerie avec plus de trois balles réduit l'intervalle des valeurs possibles pour les rapports d'arrêt, car les balles doivent être lancées plus haut et plus précisément. Avec trois objets, on a encore de vastes possibilités de modification, d'adaptation et de figures spectaculaires ; avec neuf objets, il n'existe qu'un nombre limité de manières de jongler.

Ne regardez pas les balles

La modélisation des mouvements de jonglerie n'indique en rien la coordination qui doit exister entre les mains et les yeux. L'œil, toutefois, ne doit pas suivre une balle en particulier : son attention doit s'échanger entre les balles, afin de voir uniquement une partie de la trajectoire des balles.

Quelle partie de trajectoire est la plus riche en informations ? Quelle partie doit-on observer ? «Regardez le point le plus haut» et «lancez la balle suivante lorsque la précédente atteint le sommet», conseille-t-on généralement. À l'Institut de technologie du Massachusetts, en 1974, Howard Austin a étudié la région autour du sommet de la trajectoire que devaient voir les jongleurs moyennement expérimentés pour continuer à jongler correctement. Il a placé devant les yeux et les mains des jongleurs un écran en éventail où il avait découpé une encoche, et il a observé que les jongleurs par-

venaient à rattraper les balles même lorsque trois centimètres seulement du sommet de la trajectoire de la balle étaient visibles. Les balles n'étaient ainsi visibles que pendant 50 millisecondes environ : ce bref aperçu du zénith de la trajectoire des balles suffisait aux jongleurs.

En 1994, à l'Université libre d'Amsterdam, Tony van Santvoord a étudié plus en détail les relations entre les mouvements des mains et la vision des balles. Il a demandé à des jongleurs moyennement expérimentés d'exécuter la figure de la cascade à trois balles en portant des lunettes à cristaux liquides, qui s'ouvraient et se fermaient à intervalles définis, ne donnant qu'une vision intermittente des balles. D'après la relation existant entre le mouvement des balles dans l'air et le rythme défini par les verres des lunettes, on a déduit la position des balles lorsque les verres étaient fermés, les segments de la trajectoire visible qui étaient les plus utiles aux jongleurs et le degré de coordination entre les mouvements des mains et l'information visuelle.

Dans certains cas, les jongleurs qui ont participé aux expériences ont modifié leurs mouvements pour s'adapter à l'ouverture et à la fermeture des lunettes : ils s'arrangeaient alors pour voir les balles juste après leur culmination. Les expériences ont également montré que la vue des balles devient moins importante après une période d'entraînement : les jongleurs novices et de niveau moyen utilisent beaucoup leur vue, mais les jongleurs expérimentés se fondent davantage sur les sensations qui leur viennent du contact entre les mains et les balles. Dans les années 1890, le jongleur Jean-Eugène Robert-Houdin pouvait jongler avec quatre balles tout en lisant un livre, et de nombreux jongleurs chevronnés peuvent jongler avec un bandeau sur les yeux pendant plusieurs minutes.

On suppose que, pendant l'apprentissage, la vision de la balle en mouvement étalonne graduellement le sens du toucher : par le toucher, un expert détecte immédiatement une légère variation dans l'angle de lancement ou dans l'énergie fournie à la balle, tandis qu'un novice doit constater visuellement les effets de ses erreurs sur la trajectoire des balles. Par conséquent, les corrections apportées par un expert préservent souvent l'intégrité

de la figure. En revanche, les ajustements effectués par les jongleurs moins entraînés perturbent généralement la stabilité générale de la figure.

Des robots qui jonglent

Ayant étudié la jonglerie humaine, certains chercheurs ont voulu tester leur compréhension des mouvements en construisant des robots qui jonglent. De telles machines serviraient à l'élaboration d'automates plus évolués. La jonglerie présente en effet bien des aspects de la vie quotidienne : certains gestes ressemblent à ceux de la conduite automobile dans une rue encombrée, au rattrapage des balles par fort vent, à la marche dans une pièce jonchée d'objets. Toutes ces tâches exigent une anticipation exacte des événements qui vont se dérouler afin d'organiser les actions ulté-

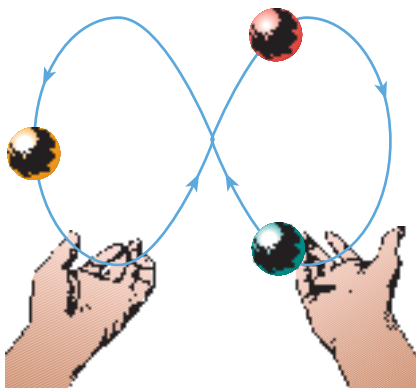
rieures.

Dans les années 1970, C. Shannon fut l'un des premiers à construire un robot jongleur : de petites billes d'acier sont expulsées d'un tambour étroit. Dans la machine de C. Shannon, les bras sont solidaires et forment un V. L'ensemble se balance attrapant une balle lorsqu'il descend et lançant une balle lorsqu'il remonte. Les erreurs de lancement sont corrigées par l'utilisation de rainures, au centre des bras, qui stabilisent les balles à leur arrivée. Rattrapées près du sommet de leur trajectoire par un bras, les balles retombent sur la rainure. Le mouvement descendant du bras ramène la balle à la fin de la rainure (à l'extrémité du bras) ce qui donne une énergie suffisante à la balle pour effectuer un lancer. La jonglerie par rebond est plus facile à exécuter que celle qui implique un lancer, parce que les balles sont

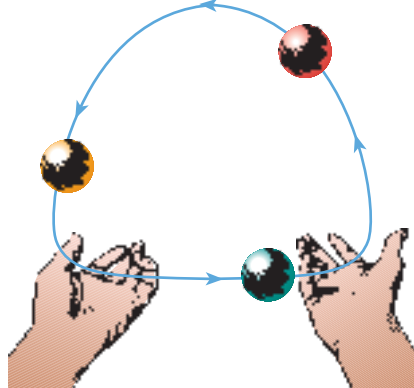
attrapées au sommet de leur trajectoire, lorsque leur vitesse de déplacement est la plus faible. La construction originale de C. Shannon comprenait trois balles, mais, depuis, Christopher Atkeson et Stefan Schaal ont construit une machine qui jongle avec cinq balles, à l'Institut de technologie de Géorgie.

Bien que les robots qui jonglent par rebond soient très habiles, on n'a pas encore réussi à construire un robot capable de jongler en lançant trois balles en cascade. On progresse toutefois : certaines machines attrapent et frappent des balles en l'air ; d'autres jonglent en deux dimensions. Dans les années 1980, Marc Donner, du Centre de recherches d'IBM de Yorktown Heights, a utilisé un plan lisse et incliné. Il était équipé de deux mécanismes de lancement se déplaçant sur des rails le long de la bordure infé-

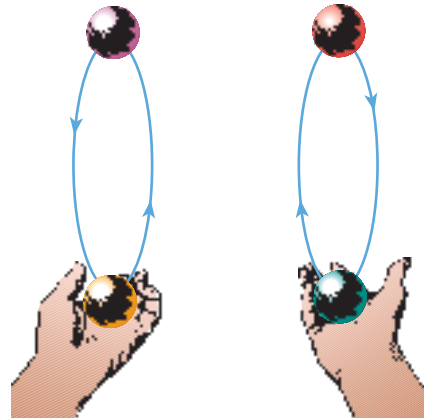
Figures de jonglerie courantes



CASCADE À TROIS BALLES



DOUCHE À TROIS BALLES



FONTAINE À QUATRE BALLES (SYNCHRONE)



4. UN BRAS ROBOTISÉ peut frapper deux balles et exécuter indéfiniment la figure de la fontaine. Une caméra enregistre la trajectoire des balles, et un algorithme spécial, qui corrige les erreurs et modi-



fie la cadence de la jonglerie, commande le mouvement du robot. L'appareil a été construit par Daniel Koditschek et Alfred Rizzi, à l'Université du Michigan.



rière de la table.

En 1989, Martin Bühler, à l'Université Yale, et Daniel Koditschek, à l'Université du Michigan, ont remplacé le dispositif de lancement circulant sur des rails par une barre en forme de boomerang, recouverte de velours. Pivotant autour d'un axe, chaque partie de cette barre frappe alternativement les palets. Pour contrôler la barre et obtenir ainsi une jonglerie permanente, les chercheurs ont utilisé ce qu'on appelle l'«algorithme miroir».

Cette machine utilise essentiellement deux idées. La première est de transformer la trajectoire continue du palet à l'aide d'une fonction non linéaire adéquate. Cela permet d'utiliser la connaissance imparfaite que l'on possède des caractéristiques (position, vitesse) du palet au point d'impact. La seconde est d'analyser l'énergie de la balle pour savoir si elle correspond à l'énergie d'un lancer parfait, afin de stabiliser le mouvement vertical du palet. Dès lors, le programme enregistre la position du palet, calcule la trajectoire de référence, ainsi que l'énergie réelle souhaitée pour le palet ; puis il calcule le moment où il faut frapper le palet et la force avec laquelle il faut le faire. Grâce à une version étendue de l'algorithme miroir, le robot exécute aussi une figure utilisant une seule main, avec deux palets et en deux dimensions. Il frappe le palet en ligne droite, alternativement avec les parties gauche et droite de la barre pivotante, dans deux colonnes séparées.

L'algorithme miroir donne des résultats impressionnants. Quand on perturbe l'un des palets, le bras du robot effectue des mouvements saccadés qui semblent artificiels aux yeux d'un jongleur humain, mais qui provoquent un retour rapide à une jonglerie normale. L'algorithme miroir commande efficacement la frappe du palet, mais ne s'étend pas au problème difficile qu'est la jonglerie avec des rattrapages contrôlés.

Outre la jonglerie par frappe et rebond, les robots parviennent à exécuter une foule d'activités liées à la jonglerie : faire valser des baguettes, faire sauter, projeter et attraper des balles dans une main en forme d'entonnoir et jouer une forme modifiée de ping-pong. Malgré tous ces progrès, aucun robot ne jongle d'une manière qui puisse ressembler, même



5. LE JONGLEUR PROFESSIONNEL Tony Duncan, dont les mains expertes apparaissent dans les clichés présentés ici, jongle également avec des massues.

vaguement, à la jonglerie humaine. Toutefois l'étude de la science de la jonglerie est récente, et les progrès réalisés au cours des 20 dernières années ont été remarquables. Il est possible que nous n'ayons pas à attendre longtemps avant de poser la devinette : «Comment le robot peut-il traverser le pont avec trois boulets de canon?»

Peter BEEK et Arthur LEWBEL peuvent jongler respectivement avec trois et huit balles. P. Beek est spécialiste de psychomotricité à l'Université libre d'Amsterdam. A. Lewbel a fondé le Club de jonglerie de l'Institut de technologie du Massachusetts et écrit dans la revue *Le monde de la jonglerie*.

Peter BEEK et Michael TURVEY, *Temporal Patterning in Cascade Juggling*, in *Journal of experimental Psychology*, vol. 18, n° 4, pp. 934-947, novembre 1992.

Scientific Aspects of Juggling, in Claude Elwood Shannon : *Collected Papers*, sous la direction de N.J.A. Sloane et A.D. Wyner, IEE Press, 1993.

J. BUHLER, D. EISENBUD, R. GRAHAM et C. WRIGHT, *Juggling Drops and Descents*, in *American Mathematical Monthly*, vol. 101, n° 6, pp. 507-519, juin-juillet 1994.

Tony van SANTVOORD et P. BEEK, *Phasing and the Pickup of Optical Information in Cascade Juggling*, in *Ecological Psychology*, vol. 6, n° 4, pp. 239-263, 1994.

Ian STEWART, *Juggling by Numbers*, in *New Scientist*, n° 1969, pp. 34-38, 18 mars 1995.

Service d'informations sur la jonglerie sur le serveur Web, à l'adresse : <http://www.hal.com/services/juggle/>

De Diophante à Fermat

CHRISTIAN HOUZEL

Le théorème de Fermat, récemment démontré, a son origine dans des problèmes qui datent du deuxième millénaire avant notre ère.

Sur son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante, en marge du problème 8 du livre II, le magistrat toulousain Pierre de Fermat écrit : «Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir».

De nombreux mathématiciens ont cherché cette démonstration sans la trouver, jusqu'à ce que, en 1994, Andrew Wiles, de l'Institut Newton, à Cambridge, utilisant des outils mathématiques complètement inconnus du temps de Fermat, vienne à bout de ce que l'on a nommé «grand théorème de Fermat», alors qu'il ne s'agissait que d'une conjecture. Quelle preuve Fermat avait-il trouvée ? On l'ignore, et il y a peu de chances que les historiens des mathématiques parviennent jamais à le savoir. En revanche, on découvre encore des fragments de l'histoire du théorème de Fermat ; un autre article, de Yves Hellegouarch,

dans le prochain numéro de *Pour la Science*, montrera comment A. Wiles a résolu le problème.

Le problème 8 du livre II de Diophante était : «diviser un nombre carré en deux carrés». Cette équation qu'on noterait aujourd'hui $x^2 + y^2 = z^2$ est dite diophantienne, parce que l'on s'impose de trouver des nombres x, y, z qui soient rationnels, c'est-à-dire exprimables sous la forme de fractions. Les triplets (x, y, z) sont également nommés pythagoriciens, parce qu'ils peuvent être associés à des côtés de triangles

rectangles, qui vérifient alors le théorème de Pythagore.

Une tablette babylonienne

L'étude de tels «triangles rectangles en nombres», c'est-à-dire dont les côtés sont des nombres rationnels, était centrale dans l'analyse diophantienne traditionnelle ; elle remonte à une très haute antiquité, puisque une tablette babylonienne du début du II^e millénaire avant notre ère contient une table numérique visiblement liée aux triplets

pythagoriciens. Dans son état actuel (voir la figure 2), elle se compose de 15 lignes, numérotées de 1 à 15 dans la colonne de droite, avec trois autres colonnes ; des traces de colle, sur une cassure, dans la colonne de gauche, montrent qu'un morceau de la tablette a été perdu à l'époque moderne. Le titre de la première colonne n'est pas lisible, mais la deuxième colonne indique des «nombres de la largeur», la troisième colonne indique des «nombres de la diagonale», et la quatrième colonne donne un «nom».

Les nombres sont écrits en notation sexagésimale (chaque ordre valant soixante fois le précédent), sans indication de la position de la virgule, avec laquelle on sépare aujourd'hui les unités des chiffres



1. Pierre de Fermat, né en 1601 près de Toulouse, est le fondateur de la théorie des nombres. Fermat était magistrat, et il ne participa à la vie mathématique de son époque que par des correspondances privées avec d'autres savants.