

De Diophante à Fermat

CHRISTIAN HOUZEL

Le théorème de Fermat, récemment démontré, a son origine dans des problèmes qui datent du deuxième millénaire avant notre ère.

Sur son exemplaire des *Arithmétiques* de Diophante, en marge du problème 8 du livre II, le magistrat toulousain Pierre de Fermat écrit : «Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré ; j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir».

De nombreux mathématiciens ont cherché cette démonstration sans la trouver, jusqu'à ce que, en 1994, Andrew Wiles, de l'Institut Newton, à Cambridge, utilisant des outils mathématiques complètement inconnus du temps de Fermat, vienne à bout de ce que l'on a nommé «grand théorème de Fermat», alors qu'il ne s'agissait que d'une conjecture. Quelle preuve Fermat avait-il trouvée ? On l'ignore, et il y a peu de chances que les historiens des mathématiques parviennent jamais à le savoir. En revanche, on découvre encore des fragments de l'histoire du théorème de Fermat ; un autre article, de Yves Hellegouarch,

dans le prochain numéro de *Pour la Science*, montrera comment A. Wiles a résolu le problème.

Le problème 8 du livre II de Diophante était : «diviser un nombre carré en deux carrés». Cette équation qu'on noterait aujourd'hui $x^2 + y^2 = z^2$ est dite diophantienne, parce que l'on s'impose de trouver des nombres x, y, z qui soient rationnels, c'est-à-dire exprimables sous la forme de fractions. Les triplets (x, y, z) sont également nommés pythagoriciens, parce qu'ils peuvent être associés à des côtés de triangles

rectangles, qui vérifient alors le théorème de Pythagore.

Une tablette babylonienne

L'étude de tels «triangles rectangles en nombres», c'est-à-dire dont les côtés sont des nombres rationnels, était centrale dans l'analyse diophantienne traditionnelle ; elle remonte à une très haute antiquité, puisque une tablette babylonienne du début du II^e millénaire avant notre ère contient une table numérique visiblement liée aux triplets

pythagoriciens. Dans son état actuel (voir la figure 2), elle se compose de 15 lignes, numérotées de 1 à 15 dans la colonne de droite, avec trois autres colonnes ; des traces de colle, sur une cassure, dans la colonne de gauche, montrent qu'un morceau de la tablette a été perdu à l'époque moderne. Le titre de la première colonne n'est pas lisible, mais la deuxième colonne indique des «nombres de la largeur», la troisième colonne indique des «nombres de la diagonale», et la quatrième colonne donne un «nom».

Les nombres sont écrits en notation sexagésimale (chaque ordre valant soixante fois le précédent), sans indication de la position de la virgule, avec laquelle on sépare aujourd'hui les unités des chiffres



1. Pierre de Fermat, né en 1601 près de Toulouse, est le fondateur de la théorie des nombres. Fermat était magistrat, et il ne participa à la vie mathématique de son époque que par des correspondances privées avec d'autres savants.

décimaux (les Babyloniens se repéraient grâce au contexte). Par exemple, 1, 59, 0, 15 peut signifier $1 \times (59/60) + 0/(60 \times 60) + 15/(60 \times 60 \times 60)$, soit 1,9834... ; 1,59 peut signifier $1 \times 60 + 59$, soit 119.

Sur le bas de la figure 2, on a reconstitué la première colonne, incomplète en raison de la cassure, en notant entre crochets les chiffres manquants ; les

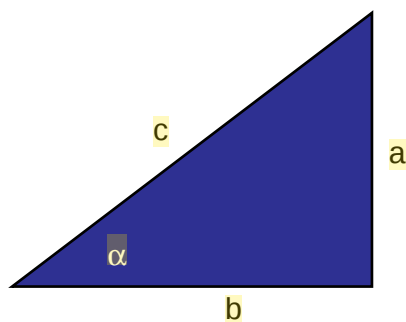
nombre de cette colonne décroissent régulièrement de la première ligne ($1 + 59/60 + 15/60^3 = 1,9834...$ à la dernière ($1 + 23/60 + 13/60^2 + 46/60^3 + 40/60^4 = 1,387188...$). Cette décroissance s'éclaire si l'on interprète chaque nombre de la deuxième colonne comme un côté b de l'angle droit d'un triangle rectangle, et le nombre correspondant de la troisième colonne comme l'hypoténuse c ; le nombre associé, dans la première colonne, est alors le rapport c^2/a^2 , encore égal à $1/\sin^2\alpha$, où a est l'autre côté de l'angle droit et α l'angle opposé au côté de longueur a .

poténuse c ; le nombre associé, dans la première colonne, est alors le rapport c^2/a^2 , encore égal à $1/\sin^2\alpha$, où a est l'autre côté de l'angle droit et α l'angle opposé au côté de longueur a .

Cette tablette comporte quelques erreurs indiquées en couleur sur la figure, mais elle est remarquable : les valeurs du côté a (non indiquées dans la table) sont toutes des nombres entiers



2. CETTE TABLETTE BABYLONNIENNE mentionne des triplets pythagoriciens, c'est-à-dire qui peuvent être des longueurs de côtés de triangles rectangles. La notation est sexagésimale. Certains chiffres manquants sont indiqués entre crochets. La deuxième colonne contient des valeurs qui sont des côtés b de l'angle droit, la troisième colonne contient des valeurs de l'hypoténuse c et la première colonne contient des rapports c^2/a^2 , où a est l'autre côté de l'angle droit.



I	II	III	IV
[1,59,0,]15	1,59	2,49	1
[1,56,56,]58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2
[1,55,7,]41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
[1,]5[3,1]0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
[1,]48,54,1,40	1,5	1,37	5
[1,]47,6,41,40	5,19	8,1	6
[1,]43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
[1,]41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
[1,]38, 33,59,3,45	9,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,34,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45	1,15	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
[1,]27,0,3,45	7,12,1	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
[1,]23,13,46,40	56	53	15

dont 2, 3, 5 sont les seuls facteurs premiers, de sorte que leurs inverses ont des expressions sexagésimales exactes : on peut donc penser que les Babyloniens disposaient d'une méthode systématique pour obtenir des triangles rectangles en nombres entiers, analogue à nos formules $a = 2pq$, $b = p^2 - q^2$ et $c = p^2 + q^2$ (la première ligne serait donnée par $p = 12$, $q = 5$, etc.). Le triangle de la onzième ligne a ses côtés (60, 45, 75) proportionnels au triplet pythagoricien le plus simple (4, 3, 5).

Certains historiens ont prétendu que les Égyptiens connaissaient ce triplet avant les Babyloniens. Ils n'en ont pas laissé de preuves. En revanche, on sait que les mathématiciens indiens, entre le V^e et le II^e siècle avant notre ère, étaient familiers de ces triplets : le texte des *Çulbasûtra* mentionne explicitement que les triplets (4, 3, 5), (12, 5, 13), (8, 15, 17), (24, 7, 25), (12, 35, 37) étaient utilisés pour construire des rectangles.

Les études de Diophante

La construction des triplets pythagoriciens est le seul résultat d'analyse diophantienne (avant Diophante) présent dans les *Éléments* d'Euclide (vers 300 avant notre ère) : c'est un lemme, ou résultat préalable, pour la proposition 28 du livre X. Le cas particulier où q est égal à $p - 1$ est d'ailleurs attribué par le philosophe Proclus à Pythagore (VI^e siècle avant notre ère) et celui où q est égal à 1 à Platon.

De combien le travail de Diophante est-il ultérieur ? Nul ne sait exactement, car on ignore si ce mathématicien alexandrin vivait au II^e siècle de notre ère, ou plutôt au III^e siècle. Une épigramme de l'*Anthologie palatine*, recueil de poèmes parfois anonymes écrits dans les premiers siècles de notre ère, c'est-à-dire peu après la mort de Diophante, contient un problème d'arithmétique élémentaire qui met en scène sa vie. Le livre XIV de l'*Anthologie palatine* est constitué de devinettes et de problèmes arithmétiques, dont certains sont indé-

terminés, mais très simples, tandis que Diophante, avec ses problèmes très difficiles, est un auteur isolé dans la mathématique grecque : le seul problème diophantien difficile connu en dehors des œuvres de Diophante est le problème des bœufs, attribué à Archimède, qui conduit à l'équation du type de Pell-Fermat : $t^2 - 4\,729u^2 = 1$ (ce problème concerne des bœufs qui paissent dans un pré ; exprimé sous forme d'un poème, il propose un système

Les *Arithmétiques* auraient été composées de 13 livres, mais on ne connaît que certains d'entre eux. Six sont connus par leur texte en grec, à travers de manuscrits dont les plus anciens remontent au XIII^e siècle ; quatre d'entre eux, dont l'original grec est perdu, ont été identifiés en 1971 par l'historien français des mathématiques Roshdi Rashed et publiés en 1984. Aujourd'hui on dispose donc de 10 des 13 livres : les trois premiers en grec (la

traduction arabe est perdue, mais on la connaît par des commentaires du X^e siècle), les quatre suivants en arabe, et les trois derniers en grec.

Dans les *Arithmétiques*, Diophante examine diverses espèces de nombres : les carrés, les cubes et les espèces que l'on obtient par combinaison des deux premières sortes (un carré-carré, par exemple, est un carré dont le côté serait un carré) ; il examine des problèmes où ces espèces sont combinées par addition, soustraction ou multiplication, de manière à donner des carrés ou des cubes. Les nombres considérés sont rationnels positifs (et pas seulement des entiers, comme dans la tradition euclidienne), et Diophante se ramène toujours, par des choix habiles, à ne conserver qu'un seul nombre inconnu, qu'il nomme simplement *arithmos*, c'est-à-dire «nombre», en grec. Il se contente généralement de trouver une solution pour chaque problème. Par exemple, pour le problème 8 du livre II, il cherche à diviser 16 en une somme de deux carrés, et il prend l'un de ces carrés inconnus comme carré du nombre (*dunamis*), soit x^2 ; l'autre carré est $16 - x^2$,

que Diophante cherche à évaluer au carré «d'un nombre quelconque d'*arithmos* diminué d'autant d'unités qu'il y a dans le côté de 16», par exemple à $(2x - 4)^2$, ce qui donne l'équation $5x^2 = 16x$, d'où $x = 16/5$.

Les manipulations de Diophante conduisent à ne conserver qu'une espèce égalée à une espèce : comme le dit d'Alembert (à l'article «Diophante» de l'*Encyclopédie*), il s'agit de «manier

DIOPHANTI ALEXANDRINI ARITHMETICORVM LIBRI SEX, ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. G.
& observationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.



TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSCH, à Regione Collegij Societatis Iesû.
M. DC. LXX.

3. L'ARITHMÉTIQUE fut rédigée par Diophante au II^e ou au III^e siècle de notre ère. Elle semble avoir été composée de 13 livres, dont seulement dix sont en notre possession : six sont en grecs et quatre sont en arabe. En marge de ce texte, Fermat écrivit avoir trouvé une solution merveilleuse qui n'a jamais été retrouvée.

de sept équations à huit inconnues avec quelques conditions).

On connaît de Diophante une œuvre intitulée *Les Arithmétiques* et un opuscule sur les nombres polygonaux, c'est-à-dire représentables par des sommets de polygones (par exemple, les carrés sont les nombres carrés, que l'on peut associer aux nombres de sommets de carrés emboîtés de plus en plus grands) ; on lui attribue également des *Porismes* aujourd'hui perdus.