

tellement les inconnues ou l'inconnue, que le carré et les plus hautes puissances de cette inconnue disparaissent, et qu'il ne reste que l'inconnue au premier degré».

Les problèmes qui se rattachent aux triangles rectangles en nombres rationnels sont nombreux dans les *Arithmétiques*. Tantôt ces triangles interviennent comme auxiliaires pour résoudre un autre problème, comme dans le cas du problème 9 du livre III : «trouver quatre nombres tels que le carré de leur somme, augmenté ou diminué de n'importe lequel d'entre eux, fasse un carré». À propos de ce problème, Diophante observe que si $a^2 + b^2 = c^2$, alors $c^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2$. Il cherche alors quatre triangles rectangles numériques (dont on note respectivement les deux côtés de l'angle droit $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4)$) ayant la même hypoténuse c ; tous ces nombres doivent alors vérifier $c^2 = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = a_3^2 + b_3^2 = a_4^2 + b_4^2$. Il choisit habilement de chercher les quatre nombres sous la forme $2a_1b_1x^2, 2a_2b_2x^2, 2a_3b_3x^2, 2a_4b_4x^2$, où x est un nombre à déterminer, de façon que la somme des quatre nombres soit cx , ce qui donne $x = c/2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)$. Il choisit c égal à 13×5 , soit 65, car il sait que le produit de deux sommes de deux carrés s'écrit de deux manières différentes comme une somme de deux carrés, et donc que 65^2 est somme de deux carrés de quatre manières.

Tantôt Diophante cherche plutôt des triangles rectangles numériques qui vérifient des conditions supplémentaires. Le livre VI, dans la numération grecque, est entièrement consacré à ce genre de problèmes. Par exemple, le problème 3 du livre VI demande de «trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire, augmentée d'un nombre donné, fasse un carré». Le nombre donné est 5 ; Diophante cherche le triangle sous la forme (ax, bx, cx) , où (a, b, c) est un triplet pythagoricien, et le carré sous la forme $(mx)^2$; avec ce choix, la condition du problème devient $(m^2 - ab/2)x^2 = 5$. Il faut trouver a, b et m de manière que $m^2 - ab/2$ soit le cinquième d'un carré. Diophante trouve à nouveau un changement de variable astucieux : il prend $a = 2, b = p^2 - 1/p^2$ et $m = p + 2 \times 5/p$, ce qui conduit au problème auxiliaire : trouver p tel que $100p^2 + 505$ soit un carré. Ce problème est résolu comme le problème 8 du livre II, en posant $100p^2 + 505 = (10p + 5)^2$, d'où $p = 24/5$ et $1/5 \times (265/24)^2 x^2 = 5$, soit $x = 24/53$.

Les mathématiciens arabes

La traduction des *Arithmétiques* en arabe avait été suscitée par un intérêt croissant pour l'analyse indéterminée, à partir de la première moitié du IX^e siècle (dans les problèmes d'analyse indéterminée, on cherche à résoudre, en nombres rationnels, des systèmes d'équations qui ont plus d'inconnues que d'équations) ; le vocabulaire employé est emprunté à l'algèbre.

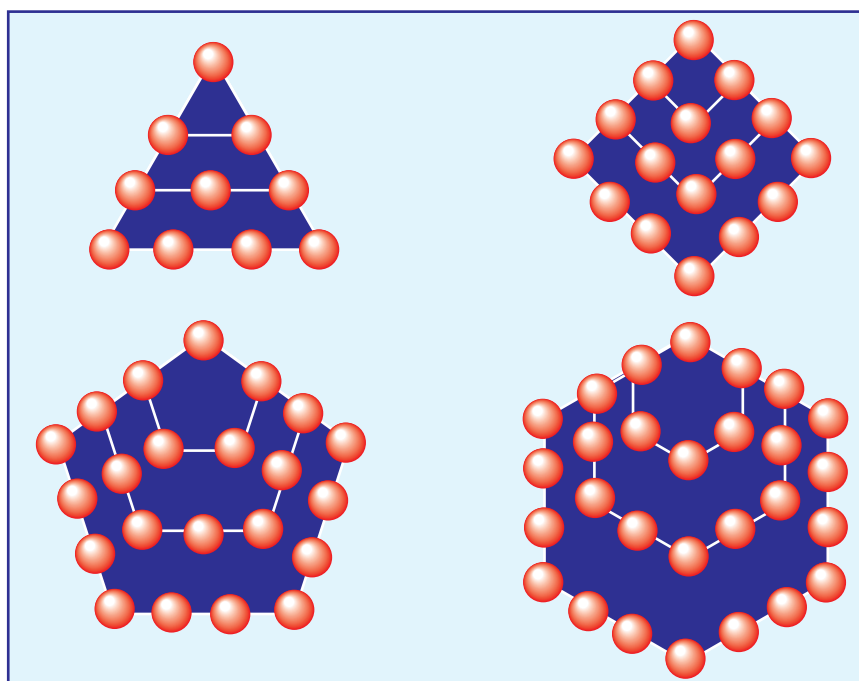
Cependant, à côté de cette lecture algébrique de Diophante, il s'est développé au X^e siècle une lecture plus proprement arithmétique, dont le représentant le plus éminent fut al-Khâzin. Cette tradition s'intéresse aux problèmes en nombres entiers, et pas seulement rationnels, et elle revient en cela à la représentation euclidienne des entiers par des segments de longueur multiples d'une longueur de base. Elle s'inscrit dans le cadre de la théorie des triangles rectangles en nombres entiers (avec le concept de triangle primitif, c'est-à-dire dont les longueurs des trois côtés n'ont pas de facteurs communs) et elle considère de nouveaux problèmes comme celui des nombres «congruents», que nous allons examiner, ainsi que des problèmes impossibles comme la division d'un cube en somme de deux cubes.

Le problème des nombres congruents est posé pour la première

fois dans un traité arabe anonyme, qui ne sera publié qu'en 1861 par l'historien des mathématiques F. Woepcke, et il a été repris par de nombreux mathématiciens. Dans la formulation d'al-Khâzin, il s'agit de «chercher un nombre carré tel que, si on lui ajoute un nombre donné et si on en retranche ce nombre donné, la somme et la différence soient deux carrés» (ce problème consiste à trouver trois nombres entiers x, y_1 et y_2 tels que $x^2 + a = y_1^2$ et $x^2 - a = y_2^2$).

Al-Khâzin se réfère au problème 19 du livre III de Diophante («trouver quatre nombres tels que le carré de leur somme, augmenté ou diminué de n'importe lequel d'entre eux, fasse un carré») ; par addition des deux équations, le double du carré cherché x^2 est somme de deux carrés $y_1^2 + y_2^2$. Une petite manipulation montre que ce carré est lui-même somme de deux carrés, $x^2 = u^2 + v^2$, où u et v sont respectivement la demi-somme et la demi-différence de y_1 et de y_2 . Alors $2uv$ est la demi-différence des deux carrés, c'est-à-dire le nombre donné a ; inversement, si $u^2 + v^2 = x^2$ et si $2uv = a$, en posant $y_1 = u + v$ et $y_2 = u - v$, on trouve $y_1^2 = x^2 + a$ et $y_2^2 = x^2 - a$.

Puisque les nombres x, u et v vérifient la relation de Pythagore, x est l'hypoténuse d'un triangle rectangle et a (égal à $2uv$) est quatre fois l'aire de ce triangle ; la plus petite valeur de a est



4. DIOPHANTE FUT L'AUTEUR d'un opuscule sur les nombres polygonaux, représentables par des sommets de polygones. Ici on a représenté des nombres triangulaires, des nombres carrés, des nombres pentagonaux et des nombres hexagonaux.