

Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés. Par conséquent, on aurait un nombre carré, somme d'un carré et du double d'un carré, avec la condition que la somme des deux carrés, qui servent à le composer, soit également un carré. Mais si un nombre carré est somme d'un carré et du double d'un carré, sa racine est également somme d'un carré et du double d'un carré, ce que je puis prouver sans difficulté. On conclura de là que cette racine est la somme des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'un des carrés composants formera la base, et le double de l'autre carré la hauteur.

Ce triangle rectangle sera donc formé par deux nombres carrés, dont la somme et la différence seront des carrés. Mais on prouvera que la somme de ces deux carrés est plus petite que celle des deux premiers dont on a également supposé que la somme et la différence soient des carrés. Donc, si on donne deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure.

Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et en continuant indéfiniment on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisant aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits.

La marge est trop étroite pour recevoir la démonstration complète et avec tous ses développements.

Par le même procédé, j'ai découvert et démontré qu'il n'y a aucun nombre triangulaire, sauf l'unité, qui soit un bicarré.

5. LE FILS DE PIERRE DE FERMAT a publié en 1670 les *Arithmétiques* de Diophante avec les annotations marginales de son père. Dans ces œuvres figure la mention du problème de Diophante et le texte où Fermat annonçait avoir résolu ce problème.

24 (on cherche des nombres tous différents), qui correspond au triplet pythagoricien le plus petit (4,3,5).

Al-Khâzin donne ensuite plusieurs méthodes relevant de l'algèbre pour résoudre le problème en nombres rationnels et non plus entiers; les nombres entiers a possibles sont dits congruents. Enfin il établit l'identité $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2$, implicite dans le raisonnement de Diophante sur les nombres représentables de plusieurs manières, comme somme de carrés.

On retrouve cette identité dans le *Livre des nombres carrés* (1225) de Léonard de Pise, encore connu sous le nom de Fibonacci. Bien qu'écrit en latin, ce livre se rattache aux mathématiques arabes; il

est publié à l'occasion une question posée à Léonard de Pise par Jean de Palerme, à la cour de l'empereur Frédéric II: trouver un carré x^2 qui, augmenté et diminué de 5, donne toujours un carré. Léonard commence par l'étude générale du problème en nombres entiers, remplaçant 5 par un nombre entier a ; il établit tout d'abord que le nombre a doit s'écrire $4pq(p^2 - q^2)$ (c'est quatre fois l'aire d'un triangle rectangle), puis il montre que ce nombre est nécessairement un multiple de 24.

Pour obtenir un nombre égal à cinq fois un carré, il prend $p = 5$ et $q = 4$; il obtient alors $a = 720 = 12^2 \times 5$, $x = p^2 + q^2 = 41$, tel que $41^2 + 720 = 49^2$, et $41^2 - 720 = 31^2$, ce qui permet de résoudre

le problème de Jean de Palerme avec $x = 41/12$.

Les problèmes impossibles

Un certain al-Khujandî, au X^e siècle, aurait proposé une démonstration incorrecte du fait que «la somme de deux nombres cubiques n'est pas un cube»; on connaît un texte de cette époque, attribué à un Abû Ja'far (ce qui est d'ailleurs un des noms d'al-Khâzin), qui pourrait bien être cette tentative. L'auteur établit géométriquement que «pour deux nombres cubiques, leur différence est la somme du produit du carré du plus petit côté par la différence des deux côtés, plus le produit de la somme des deux côtés par leur différence, en ensuite par le plus grand côté». Autrement dit: $z^3 - y^3 = y^2(z - y) + (z + y)(z - y)z$. Puis, entraîné par le langage géométrique, il affirme péremptoirement que cette expression n'est pas un cube (au sens géométrique), ce qui n'est évidemment pas une démonstration.

Une liste de 33 problèmes impossibles considérés par Ibn al-Khawwâm al-Baghdâdî, à la fin du XIII^e siècle, est connue par le commentaire qu'en fait un élève, Kamâl al-Dîn al-Fârisî. Al-Baghdâdî écrit: «Nous ne prétendons pas que nous pouvons établir leur impossibilité, mais nous affirmons que nous ne pouvons pas les résoudre». Parmi ces problèmes, le premier s'énonce: «Trouver deux carrés dont la somme et la différence soient des carrés». Autrement dit, un carré ne pourrait pas être congruent. Le troisième problème est «trouver un triangle rectangle dont les côtés sont des carrés», et le 24-ième: «diviser un cube en deux cubes». Ce sont précisément les équations de Fermat pour les exposants 4 et 3.

Fermat, enfin

Diophante a été progressivement redécouvert en grec, dans le monde européen, à partir du XVI^e siècle. Le mathématicien italien Rafael Bombelli (1526-1572) a consulté un manuscrit des *Arithmétiques* à la bibliothèque du Vatican; puis l'érudit W. Holzmänn, qui signait Xylander, en a publié une traduction en latin en 1575. Enfin le Français Gaspard Bachet de Méziriac (1581-1638) a publié le texte grec avec une traduction latine en 1621, et c'est dans cette traduction que Fermat a pris

connaissance de Diophante. Dans les marges de son exemplaire personnel, il a mis un certain nombre d'observations, et son fils Samuel a publié en 1670 le texte de Diophante complété par les annotations paternelles. Ces observations sont une source d'informations précieuse pour la connaissance des travaux arithmétiques de Fermat.

Ce dernier, comme avant lui al-Khâzin, distingue entre l'analyse diophantienne en nombres entiers, dite arithmétique, et l'analyse diophantienne en nombres rationnels, plus algébrique et que Fermat rejette du côté de la géométrie, c'est-à-dire de la science des quantités continues. Dans un défi qu'il lance aux mathématiciens en 1657, il commence par ces mots : «Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même ? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationnels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue et, par suite, à la Géométrie». Contrairement à Diophante, Fermat cherche à déterminer toutes les solutions de chaque problème indéterminé.

Le principe unificateur de son analyse en nombres entiers semble être sa méthode de descente infinie : dans cette méthode, on part d'une solution en nombres entiers positifs d'une équation ; on en déduit qu'il existe alors une autre solution, en nombres entiers positifs, mais plus petits que les précédents ; puis en répétant cette construction sur la solution plus petite, on trouve une solution encore inférieure, et on répète indéfiniment le processus. Comme toutes les solutions ainsi obtenues sont des nombres entiers positifs et qu'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'entiers positifs (on s'arrête évidemment à 0), l'équation ne peut avoir de solution.

Les principaux problèmes qu'il est parvenu à résoudre par cette méthode sont déjà énoncés dans une lettre au père Mersenne, au début

juin 1638 : trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un carré ; trouver deux carrés-carrés (deux puissances quatrièmes) dont la somme soit un carré-carré, ou deux cubes dont la somme soit un cube ; trouver trois carrés en progression arithmétique (avec le même écart entre le premier et le deuxième carré qu'entre le deuxième et le troisième) sous la condition que la différence de la progression soit un carré.

À ces problèmes, Fermat ajoute des théorèmes : (1) Tout nombre est somme d'un, de deux ou de trois «triangles» (c'est-à-dire nombres triangulaires ; voir la figure 4) ; d'un, deux, trois ou quatre carrés ; d'un, deux, trois, quatre ou cinq pentagones ; d'un, deux, trois, quatre, cinq ou six hexagones ; d'un, deux, trois, quatre, cinq, six ou sept heptagones, et ainsi de suite indéfiniment. (2) Un multiple de 8 diminué d'une unité se compose seulement de quatre carrés, non seulement en entiers, mais même en fractions». D'autres sont énoncés en août 1659 dans une lettre à Pierre de Carcavi, un magistrat parisien avec lequel Fermat correspondait.

On n'a que deux exemples de démonstrations par descente infinie de la main de Fermat : l'une se trouve en marge d'un problème ajouté par Bachet à la fin du livre VI de Diophante : «Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit un nombre donné». Fermat ajoute : «L'aire d'un triangle rectangle en

nombres ne peut être un carré(...) Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré ; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés(...) Donc si on donne deux carrés dont la somme et la différence sont des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et, en continuant indéfiniment, on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisants aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits...»

Traduisons algébriquement le discours de Fermat : pour le triangle rectangle de côtés de l'angle droit $2pq$, $p^2 - q^2$, et d'hypoténuse $p^2 + q^2$, l'aire $pq(p^2 - q^2)$ étant un carré, les nombres p , q , $p^2 - q^2$ sont des carrés, car p et q sont supposés premiers eux (ils n'ont pas de facteur commun) et de parités différentes (sinon le facteur 2 serait facteur commun) ; ainsi $p = u^2$, $q = v^2$ et $p^2 - q^2 = u^4 - v^4 = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)$ est un carré, donc $u^2 + v^2 = s^2$ et $u^2 - v^2 = t^2$. On déduit que $s^2 = t^2 + 2v^2$, et que $s = m^2 + 2n^2$, $t = m^2 - 2n^2$, et $v = 2mn$, de sorte que $u^2 = t^2 + v^2 = (m^2)^2 + (2n^2)^2$ et $(2n^2, m^2, u)$ est un nouveau triangle



6. LA MÉTHODE DE LA CORDE, inventée par Newton, fut appliquée à la fin du siècle dernier à des courbes d'équation $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré égal à trois. Newton a remarqué qu'une droite qui passe par deux points de coordonnées rationnelles de la courbe passe également par un troisième point rationnel. La méthode de la tangente correspond au cas particulier où deux points sont confondus : la sécante devient une tangente, de sorte qu'un point rationnel en détermine un autre.