

connaissance de Diophante. Dans les marges de son exemplaire personnel, il a mis un certain nombre d'observations, et son fils Samuel a publié en 1670 le texte de Diophante complété par les annotations paternelles. Ces observations sont une source d'informations précieuse pour la connaissance des travaux arithmétiques de Fermat.

Ce dernier, comme avant lui al-Khâzin, distingue entre l'analyse diophantienne en nombres entiers, dite arithmétique, et l'analyse diophantienne en nombres rationnels, plus algébrique et que Fermat rejette du côté de la géométrie, c'est-à-dire de la science des quantités continues. Dans un défi qu'il lance aux mathématiciens en 1657, il commence par ces mots : «Il est à peine quelqu'un qui propose des questions purement arithmétiques, il est à peine quelqu'un qui sache les résoudre. Est-ce parce que l'Arithmétique a plutôt été traitée jusqu'à présent au moyen de la Géométrie que par elle-même ? C'est la tendance qui apparaît dans la plupart des Ouvrages tant anciens que modernes et dans Diophante lui-même. Car s'il s'est écarté de la Géométrie un peu plus que les autres en astreignant son analyse à ne considérer que des nombres rationnels, il ne s'en est pas dégagé tout à fait, comme le prouvent surabondamment les *Zététiques* de Viète, dans lesquelles la méthode de Diophante est étendue à la quantité continue et, par suite, à la Géométrie». Contrairement à Diophante, Fermat cherche à déterminer toutes les solutions de chaque problème indéterminé.

Le principe unificateur de son analyse en nombres entiers semble être sa méthode de descente infinie : dans cette méthode, on part d'une solution en nombres entiers positifs d'une équation ; on en déduit qu'il existe alors une autre solution, en nombres entiers positifs, mais plus petits que les précédents ; puis en répétant cette construction sur la solution plus petite, on trouve une solution encore inférieure, et on répète indéfiniment le processus. Comme toutes les solutions ainsi obtenues sont des nombres entiers positifs et qu'il n'existe pas de suite infinie décroissante d'entiers positifs (on s'arrête évidemment à 0), l'équation ne peut avoir de solution.

Les principaux problèmes qu'il est parvenu à résoudre par cette méthode sont déjà énoncés dans une lettre au père Mersenne, au début

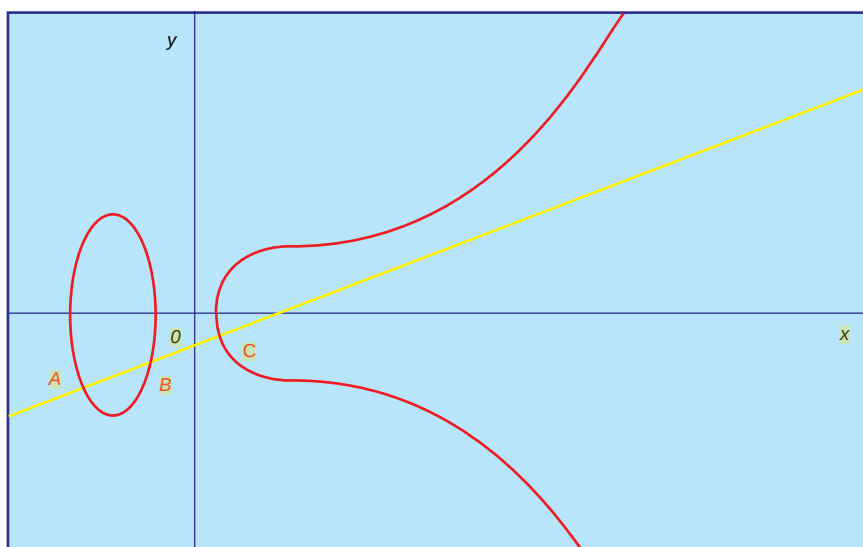
juin 1638 : trouver un triangle rectangle en nombres, dont l'aire soit un carré ; trouver deux carrés-carrés (deux puissances quatrièmes) dont la somme soit un carré-carré, ou deux cubes dont la somme soit un cube ; trouver trois carrés en progression arithmétique (avec le même écart entre le premier et le deuxième carré qu'entre le deuxième et le troisième) sous la condition que la différence de la progression soit un carré.

À ces problèmes, Fermat ajoute des théorèmes : (1) Tout nombre est somme d'un, de deux ou de trois «triangles» (c'est-à-dire nombres triangulaires ; voir la figure 4) ; d'un, deux, trois ou quatre carrés ; d'un, deux, trois, quatre ou cinq pentagones ; d'un, deux, trois, quatre, cinq ou six hexagones ; d'un, deux, trois, quatre, cinq, six ou sept heptagones, et ainsi de suite indéfiniment. (2) Un multiple de 8 diminué d'une unité se compose seulement de quatre carrés, non seulement en entiers, mais même en fractions». D'autres sont énoncés en août 1659 dans une lettre à Pierre de Carcavi, un magistrat parisien avec lequel Fermat correspondait.

On n'a que deux exemples de démonstrations par descente infinie de la main de Fermat : l'une se trouve en marge d'un problème ajouté par Bachet à la fin du livre VI de Diophante : «Trouver un triangle rectangle dont l'aire soit un nombre donné». Fermat ajoute : «L'aire d'un triangle rectangle en

nombres ne peut être un carré(...) Si l'aire d'un triangle était un carré, il y aurait deux bicarrés dont la différence serait un carré ; il s'ensuit qu'on aurait également deux carrés dont la somme et la différence seraient des carrés(...) Donc si on donne deux carrés dont la somme et la différence sont des carrés, on donne par là même, en nombres entiers, deux carrés jouissant de la même propriété et dont la somme est inférieure. Par le même raisonnement, on aura ensuite une autre somme plus petite que celle déduite de la première, et, en continuant indéfiniment, on trouvera toujours des nombres entiers de plus en plus petits satisfaisants aux mêmes conditions. Mais cela est impossible, puisqu'un nombre entier étant donné, il ne peut y avoir une infinité de nombres entiers qui soient plus petits...»

Traduisons algébriquement le discours de Fermat : pour le triangle rectangle de côtés de l'angle droit $2pq$, $p^2 - q^2$, et d'hypoténuse $p^2 + q^2$, l'aire $pq(p^2 - q^2)$ étant un carré, les nombres p , q , $p^2 - q^2$ sont des carrés, car p et q sont supposés premiers eux (ils n'ont pas de facteur commun) et de parités différentes (sinon le facteur 2 serait facteur commun) ; ainsi $p = u^2$, $q = v^2$ et $p^2 - q^2 = u^4 - v^4 = (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)$ est un carré, donc $u^2 + v^2 = s^2$ et $u^2 - v^2 = t^2$. On déduit que $s^2 = t^2 + 2v^2$, et que $s = m^2 + 2n^2$, $t = m^2 - 2n^2$, et $v = 2mn$, de sorte que $u^2 = t^2 + v^2 = (m^2)^2 + (2n^2)^2$ et $(2n^2, m^2, u)$ est un nouveau triangle



6. LA MÉTHODE DE LA CORDE, inventée par Newton, fut appliquée à la fin du siècle dernier à des courbes d'équation $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré égal à trois. Newton a remarqué qu'une droite qui passe par deux points de coordonnées rationnelles de la courbe passe également par un troisième point rationnel. La méthode de la tangente correspond au cas particulier où deux points sont confondus : la sécante devient une tangente, de sorte qu'un point rationnel en détermine un autre.

rectangle dont l'aire m^2n^2 est un carré ; alors $m^2 = u_1^4 - v_1^4$, avec des nombres u_1, v_1 , tels que $u_1^2 \pm v_1^2$ soit carré, et on voit que $u_1^2 + v_1^2 < u^2 + v^2$. Cette démonstration donne l'impossibilité de l'équation de Fermat pour l'exposant 4.

Dans sa correspondance ou dans ses travaux publiés, Fermat n'a jamais fait allusion à son équation pour d'autres exposants que 3 et 4. Il est donc permis de penser qu'il s'est aperçu après coup d'une difficulté dans la démonstration qu'il croyait avoir pour le cas général de sa conjecture.

Les successeurs de Fermat

Pendant le XVII^e siècle, l'analyse diophantienne est restée un sujet à la mode qui a intéressé notamment Isaac Newton et Wilhelm von Leibniz. Au premier, on doit une note remarquable dans un cahier de 1670, où il interprète l'équation diophantienne $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré égal à trois (de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$), comme la recherche des points à coordonnées rationnelles sur la courbe définie par cette équation. Newton explique comment une sécante qui joint deux points rationnels (c'est-à-dire dont l'abscisse et l'ordonnée sont des nombres rationnels) recoupe la courbe en un troisième point rationnel, mais cette interprétation par la géométrie algébrique reste isolée, à l'époque (voir la figure 6).

Leibniz avait découvert que certaines manipulations de l'analyse diophantienne conduisant à exprimer rationnellement, en fonction d'un paramètre, des quantités x et y liées par une relation algébrique $f(x, y) = 0$, pouvaient être employées pour obtenir des intégrales de y en fonction de x (l'aire sous la courbe donnée par l'équation $y = f(x)$). On trouve une remarque analogue dans des lettres du mathématicien suisse Daniel Bernoulli (1700-1782) à Christian Goldbach (1690-1764), en décembre 1723 et en mars 1724.

C'est précisément par Goldbach que l'attention du Bâlois Léonard Euler (1707-1783) a été attirée sur les travaux arithmétiques de Fermat, à partir de 1730. Euler a beaucoup étudié le grand théorème de Fermat, et beaucoup de ses travaux sont consacrés à des démonstrations de résultats annoncés par Fermat.

Le premier thème est l'étude des équations diophantiennes de degré

égal à deux. En supposant connue une solution rationnelle, il aborde la recherche des autres solutions d'une manière analogue à celle de Diophante pour le problème 8 du livre II, et il remarque que la détermination des solutions entières exige la résolution d'une équation du type de Pell-Fermat.

Un deuxième thème est l'étude des équations de la forme $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré égal à trois ou quatre, et des problèmes apparentés. On peut y rattacher l'impossibilité de l'équation $x^4 + y^4 = z^2$, qu'Euler établit, en 1747, par descente infinie, à la manière de Fermat, et dont il tire une série de corollaires.

Les constructions d'Euler relatives à ces équations peuvent s'interpréter géométriquement comme l'avait fait Newton (méthode de la sécante ou de la tangente), mais Euler n'en dit rien. Le lien avec le calcul intégral ne lui avait peut-être pas échappé, car, vers 1780, il transforme l'équation $y^2 = P(x)$ en une autre équation analogue à celle qui donne l'addition des «intégrales elliptiques». Ces intégrales ne s'expriment pas par des fonctions élémentaires (les quatre opérations, l'exponentielle, le logarithme et les fonctions sinus et cosinus) ; elles sont égales aux aires comprises entre l'axe des abscisses et les courbes de la forme $y = R(x, \sqrt{P(x)})$, où R est une fonction rationnelle et où P est un polynôme à une variable de degré trois ou quatre.

Euler a donné une démonstration du théorème de Fermat pour l'exposant égal à 3 ; il y fait une première allusion dans une lettre à Goldbach, en août 1753, puis, en 1759, dans un article consacré aux formes quadratiques $a^2 + 3b^2$ et $m^2 + mn + n^2$: on passe de l'une à l'autre en posant $m = a + b$ et $n = b - a$, et Euler annonce que si t^3 est représenté par la seconde forme, il en est de même de t , ce qui lui permet d'amorcer une démonstration par descente infinie. Il publie une démonstration dans son *Algèbre*, en 1770, où il utilise des nombres complexes de la forme $a + b\sqrt{-3}$ (où a et b sont des nombres entiers), en admettant que ces nombres ont une décomposition en facteurs premiers comme les entiers ordinaires : tout nombre de cette forme se décompose en un produit unique de nombres «premiers» du même type.

Cependant il remarque que l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ est possible : c'est le problème 16 du livre V de Diophante, qu'il étudie dans un article de 1756. Il

pense qu'une somme de trois bicarrés ne peut être un bicarré, tandis qu'une somme de quatre bicarrés peut être un bicarré (l'équation correspondante, $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = u^4$, ne sera résolue qu'en 1911 par le mathématicien américain M. Norrie). Euler croyait encore qu'une somme de quatre puissances cinquièmes ne peut pas être une puissance cinquième, mais, en 1962, M. Birch a trouvé un contre-exemple par ordinateur, démontrant ainsi que cette idée était fausse.

Joseph Louis Lagrange (1736-1813) a pris le relais d'Euler pendant la dizaine d'années où il s'est intéressé à la théorie des nombres. Lagrange obtient d'abord un résultat sur la périodicité des fractions continues de nombres quadratiques : les nombres quadratiques sont les racines d'équations du deuxième degré dont les coefficients sont des nombres entiers (par exemple, $\sqrt{3}$ est un nombre quadratique, parce qu'il est solution de l'équation $x^2 - 3 = 0$). On peut écrire ces nombres sous la forme de fractions continues, de la forme générale $1 + 1/(a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(...))))$; notamment $\sqrt{3}$ s'écrit sous la forme $1 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(2...))))$ dont la périodicité est égale à deux : les 1 et les 2 alternent aux dénominateurs successifs.

À partir de ce résultat, Lagrange établit la possibilité de l'équation de Pell-Fermat dans le cas général. Puis il obtient un critère d'existence d'une solution pour les équations diophantiennes de degré deux (critère qui sera amélioré par Adrien Marie Legendre). Lagrange n'aborde les équations de degré trois ou quatre que dans un article de 1777, où il utilise, sous une forme exclusivement algébrique, la méthode de la tangente.

L'analyse diophantienne au XIX^e siècle

Au XIX^e siècle, de nouveaux cas de la conjecture de Fermat sont progressivement établis : Peter Dirichlet (1805-1859), alors étudiant à Paris, démontre en 1825 l'impossibilité de l'équation $x^5 \pm y^5 = 2^m z^5$, avec m positif, par une descente infinie fondée sur les propriétés des nombres de la forme $a + b\sqrt{5}$. La même année, Legendre démontre le théorème de Fermat pour l'exposant 5. Puis, en 1832, Dirichlet établit le cas de l'exposant 14 au moyen de l'arithmétique des nombres de la