

premiers réguliers. Les seuls nombres premiers irréguliers inférieurs à 100 sont 37, 59 et 67.

Analyse diophantienne et géométrie algébrique

Le travail de Newton précédemment évoqué à propos de tangentes et de sécantes (inconnu jusque dans les années 1960) était resté sans suite, mais la connexion de l'analyse diophantienne avec le calcul intégral fut explicitée pour le cas des intégrales elliptiques par Carl Jacobi (1804-1851) dans une courte note publiée en 1834. Jacobi y interprète la méthode d'Euler pour construire des solutions rationnelles de l'équation $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré égal à 4, au moyen de la multiplication par un entier de l'intégrale de la fonction $1/\sqrt{P(x)}$.

James Sylvester (1804-1897), à l'Université de Londres, a consacré des travaux remarquables à l'étude des équations diophantiennes de degré égal à 3 par la géométrie algébrique. Il annonce ses résultats dans une note de 1858 et il les développe dans une série de mémoires en 1879 et en 1880. Sa méthode consiste à construire des points rationnels d'une courbe cubique (voir la figure 5) à partir d'un point rationnel donné en se servant de tangentes et de sécantes.

En 1890, le dernier mathématicien capable d'embrasser l'ensemble des mathématiques, David Hilbert (1862-1943), et son professeur Adolf Hurwitz (1859-1919) étudient systématiquement les équations diophantiennes à l'aide de la notion de genre d'une courbe, introduite par Rudolf Clebsch (1833-1872), à la suite de travaux de Bernhard Riemann : on étend la méthode de la corde en remplaçant la sécante (de degré 1) qui coupe la cubique (de degré 3, soit $1 + 2$) par une courbe de degré inférieur de deux unités au degré n de la courbe étudiée et en imposant que cette courbe passe par tous les points singuliers (points doubles, points de rebroussement, etc). On lui impose en outre de passer par un certain nombre de points ordinaires. Si p est le genre, ce nombre de points imposés doit être égal à $n - 2 + p$, et il reste p points d'intersection. Hilbert et Hurwitz se limitent au genre égal à zéro ; ils trouvent que l'on peut passer, par des quotients de polynômes à coefficient rationnels (des «transformations birationnelles»), de courbes de genre

égal à zéro et de degré n définies sur l'ensemble des nombres rationnels à une droite ou à une conique, et inversement. En réduisant ainsi le degré d'une équation diophantienne, ils arrivent au degré 1 ou 2, que l'on sait résoudre.

Puis, en 1901, Henri Poincaré (1854-1912), sans connaître apparemment le travail de Hilbert et de Hurwitz, consacre un article important à l'analyse diophantienne. Poincaré voulait classer les problèmes diophantiens en problèmes équivalents par certaines transformations adaptées à la nature du problème. Comme il s'intéressait à l'analyse diophantienne rationnelle, les transformations birationnelles à coefficients rationnels se présentèrent naturellement, et le genre, qui n'est pas modifié au cours de telles transformations (on dit que c'est un invariant birationnel) a une signification que n'a pas le degré. Poincaré traite d'abord le cas du genre zéro, obtenant le même résultat que Hilbert et Hurwitz ; puis il passe au genre un, qui occupe l'essentiel de son mémoire.

Poincaré montre que les courbes de genre un qui ont un point rationnel sont birationnellement équivalentes à la cubique déjà considérée, d'équation $y^2 = 4x^3 - ax - b$. Il introduit les fonctions dites elliptiques afin d'exprimer les coordonnées des points de ces courbes.

Un ensemble de points rationnels d'une cubique plane est dit stable par la construction des tangentes et des sécantes si cette construction ne fait pas sortir de l'ensemble. Dans une suite d'articles publiés entre 1906 et 1908, Beppo Levi cherche ces systèmes stables. En termes modernes, il s'agit de déterminer quels sont les groupes de torsion possibles dans le groupe des points rationnels (voir la figure 7). La détermination complète a été faite par Bruno Mazur, en 1978, et il est remarquable que Levi s'en soit approchée.

Contrairement à Poincaré, L. Mordell s'intéressait à l'analyse diophantienne entière ; en 1922, il voulait établir la finitude du nombre de solutions entières d'équations diophantiennes de la forme $y^2 = P(x)$, où P est un polynôme de degré trois ou quatre. Pour le degré trois, la théorie des nombres algébriques lui permettait de se ramener à un théorème d'Axel Thue, lié à la théorie des approximations diophantiennes (comment estimer la rapidité de l'approximation d'un nombre irrationnel par une

suite de nombres rationnels), sur la finitude du nombre de solutions entières d'une équation de la forme $F(u,v) = m$, où F est un polynôme homogène en (u,v) , c'est-à-dire dont le degré total, pour u et pour v soit égal pour tous les termes du polynôme (par exemple, le polynôme $uv^3 + u^2v^2 + 4v^4$ est homogène, et de degré égal à quatre) ; mais cette méthode était inopérante en degré quatre.

Mordell s'est aperçu qu'elle lui donnait un procédé de descente conduisant à établir que les points rationnels s'obtiennent à partir d'un nombre fini d'entre eux par la construction des tangentes et des sécantes ; c'est alors seulement qu'il cite Poincaré et qu'il formule sa célèbre conjecture, sur la finitude du nombre de points rationnels pour les genres strictement supérieurs à un.

André Weil, en 1929, a réinterprété le résultat de Mordell en termes du groupe des points rationnels d'une courbe elliptique. La conjecture de Mordell a fini par être démontrée en 1983, par l'Allemand Gerd Faltings, qui a suivi une autre voie. Comme la courbe de Fermat est de genre supérieur à un lorsque l'exposant est strictement supérieur à trois, le théorème de G. Faltings indique que l'équation de Fermat n'a au plus qu'un nombre fini de solutions.

Le théorème de Fermat proprement dit est sorti de son isolement plus récemment, en 1987, quand on s'est aperçu qu'il se déduisait de conjectures formulées de manière complètement indépendantes. Notamment un théorème de Kenneth Ribet a montré que le théorème de Fermat est une conséquence d'une conjecture de M. Taniyama et de A. Weil sur les courbes elliptiques ; c'est cette conjecture que A. Wiles vient de démontrer.

Christian HOUZEL est professeur de mathématiques à l'IUFM de Paris.

O. NEUGEBAUER et A. SACHS, *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven, 1945.

DIOPHANTE, *Les Arithmétiques*, 4 vol., Éditions Allard et Rashed, Paris, vol. 3 et 4, 1984 ; vol. 1 et 2 à paraître.

G. TERJANIAN, *Fermat et l'analyse diophantienne*, *Sém. d'Hist. des Math. de Toulouse* 8, pp. 57-66, 1986.

P. RIBENBOÏM, *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, Berlin, 1979.

Les commentaires du mathématicien

JEAN-PAUL DELAHAYE

Les 92 éléments du Big Bang numérique de John Horton Conway.

Aristote, le plus grand de tous les philosophes, méritait bien qu'on le commente, ce que fit Averroès (parmi bien d'autres) au XII^e siècle. Saint Thomas d'Aquin commenta ce commentaire (qu'il désapprouvait) et il fut lui-même commenté par Étienne Gilson qui lui-même... On trouverait mille autres exemples, en littérature ou en philosophie, de ces jeux infinis de commentaires, chacun s'appuyant sur le précédent *ad infinitum*.

Si le philosophe a toujours plus à dire que son prédécesseur, le mathématicien est plus économe de ses propos et ne profite pas de son commentaire pour étaler ses sentiments intimes sur le monde. Dans son *Dictionnaire des idées reçues*, Gustave Flaubert a soigneusement noté, en face du mot mathématiques : dessèchent le cœur.

Pourtant, nous allons voir que le jeu du commentaire mathématique engendre un monde remarquablement riche... en structures mathématiques.

Prenez un mathématicien (au cœur le plus sec possible) ; donnez-lui le texte

1. L'ART DU COMMENTAIRE NUMÉRIQUE

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211
31131211131221
13211311123113112211
11131221133112132113212221
3113112221232112111312211312113211

Partant du nombre 1, on le décrit, cela donne «un "1", c'est-à-dire 11. On décrit 11, cela donne «deux "1"» c'est-à-dire 21, ce qui se décrit «un "2", un "1"», c'est-à-dire 1211 etc. En poursuivant ainsi seuls les chiffres 1, 2 et 3 sont nécessaires.

numérique le plus élémentaire qu'il soit : «1» ; et demandez-lui son commentaire. Laconique, il répondra : «un "1"» (signifiant : le texte est composé d'un «1»), ce qu'il écrira «1 1».

Demandez-lui de commenter ce commentaire numérique. Avec une remarquable efficacité et sans ostentation, il vous dira «deux "1"», ce qu'il écrira «2 1». Continuez ainsi, vous obtiendrez de lui le commentaire «1 2 1 1», puis «1 1 1 2 2 1», puis «3 1 2 2 1 1», et ainsi de suite...

L'EXPANSION NUMÉRIQUE

Facile à dire, mais quelle est cette suite ? Remarquez que la suite de commentaires est valable aussi bien en français qu'en anglais : elle n'a pas besoin d'être traduite d'une langue à l'autre. Cette suite aurait été décrite pour la première fois par l'Allemand M. Hilgemeir dans un article où il en démontrait quelques propriétés élémentaires. Il revient cependant à John Conway – célèbre pour son invention du jeu de la vie – d'avoir traité presque toutes les questions posées par ce jeu des commentaires numériques infinis. Ce qu'il a trouvé est étrange, complexe et fascinant.

Pour présenter ses résultats, J. Conway propose d'utiliser le langage de la chimie, de la physique et de la cosmologie. Il imagine un monde qui, seconde après seconde, n'est que le développement des commentaires numériques successifs du texte «1». Cette vision parménidienne du monde comme devenir de l'un, aurait sans doute plu à Platon. Le Big Bang numérique de Conway, c'est l'expansion infinie de la suite : «1», «1 1», «2 1», «1 2 1 1», «1 1 1 2 2 1», «3 1 2 2 1 1», «1 3 1 1 2 2 2 1», «1 1 1 3 2 1 3 2 1 1», «3 1 1 3 1 2 1 1 1 3 1 2 2 1», etc.

Le terme d'expansion n'est pas abusif, car J. Conway a établi que le taux d'augmentation moyen de cet univers est 1,30357726903... D'un terme à l'autre, la taille de l'univers est multipliée par ce nombre, solution d'une équation de degré 71, que J. Conway, aidé d'Oliver Atkin, a



2. LES ÉLÉMENTS

01	H	22
02	He	13112221133211322112211213322112
03	Li	312211322212221121123222112
04	Be	111312211312113221133211322112211213322112
05	B	1321132122211322212221121123222112
06	C	31131122211322112211213322112
07	N	111312212221121123222112
08	O	132112211213322112
09	F	31121123222112
10	Ne	111213322112
11	Na	123222112
12	Mg	3113322112
13	Al	1113222112
14	Si	1322112
15	P	311311222112
16	S	1113122112
17	Cl	132112
18	Ar	3112
19	K	1112
20	Ca	12
21	Sc	3113112221133112
22	Ti	11131221131112
23	V	13211312
24	Cr	31132
25	Mn	111311222112
26	Fe	13122112
27	Co	32112
28	Ni	11133112
29	Cu	131112
30	Zn	312
31	Ga	13221133122211332
32	Ge	31131122211311122113222
33	As	11131221131211322113322112
34	Se	13211321222113222112
35	Br	3113112211322112
36	Kr	11131221222112
37	Rb	1321122112
38	Sr	3112112
39	Y	1112133
40	Zr	12322211331222113112211
41	Nb	1113122113322113111221131221
42	Mo	13211322211312113211
43	Tc	311322113212221
44	Ru	132211331222113112211
45	Rh	311311222113111221131221
46	Pd	111312211312113211
47	Ag	132113212221
48	Cd	3113112211
49	In	11131221
50	Sn	13211
51	Sb	3112221
52	Te	1322113312211
53	I	311311222113111221
54	Xe	11131221131211
55	Cs	13211321
56	Ba	311311
57	La	11131
58	Ce	1321133112
59	Pr	31131112
60	Nd	111312
61	Pm	132
62	Sm	311332
63	Eu	1113222
64	Gd	132211331112
65	Tb	3113112221131112
66	Dy	111312211312
67	Ho	1321132
68	Er	311311222
69	Tm	11131221133112
70	Yb	1321131112
71	Lu	311312
72	Hf	11132
73	Ta	13112221133211322112211213322113
74	W	312211322212221121123222113
75	Re	111312211312113221133211322112211213322113
76	Os	1321132122211322212221121123222113
77	Ir	31131122211322112211213322113
78	Pt	111312212221121123222113
79	Au	132112211213322113
80	Hg	31121123222113
81	Tl	111213322113
82	Pb	123222113
83	Bi	3113322113
84	Po	1113222113
85	At	1322113
86	Rn	311311222113
87	Fr	1113122113
88	Ra	132113
89	Ac	3113
90	Th	1113
91	Pa	13
92	U	3

écrite explicitement. Cela signifie que le commentaire numérique d'un texte augmente sa taille de 30 pour cent en moyenne à chaque étape (ce résultat est vrai quel que soit le point de départ, sauf pour le noyau «2 2» qui, bien sûr, reste fixe). Dans cette cosmologie arithmétique, nous savons donc – contrairement à la cosmologie du monde physique où cette question reste ouverte – que l'expansion ne cessera jamais (en particulier, il n'y a pas de cycle fini autre que 2 2). Il est remarquable peut-être que, comme en littérature, le commentateur au fil des siècles voit son travail s'alourdir, devenir de plus en plus compliqué sans qu'il y ait aucune limite, et cela bien que le point de départ soit simplement un unique «1».

L'analogie avec le monde physique proposée par J. Conway est plus profonde encore. L'univers engendré par les commentaires numériques sur l'UN se décompose en éléments stables et en éléments instables, et il y a 92 éléments stables que J. Conway a baptisés du nom des 92 premiers éléments de la classification périodique des éléments chimiques de Mendeleïev. Les transformations des éléments numériques correspondent, sans être exactement les mêmes, aux transmutations spontanées des éléments physiques.

LA CHIMIE DU BIG BANG NUMÉRIQUE

Définissons d'abord ce qu'est un élément. Certains nombres N sont une concaténation de deux morceaux $G.D$ qui, dans la suite des commentaires numériques, n'interféreront plus jamais entre eux. $G.D$ est une décomposition du nombre N si, pour tout entier n , le n ième commentaire de N est obtenu en juxtaposant le n ième commentaire de G et le n ième commentaire de D .

Le nombre 1113213211, par exemple, se décompose en $G = 11132$ et $D = 13211$. En effet, les commentaires successifs de 11132 se termineront tous par 2 (réfléchissez une seconde pour vous en persuader), alors qu'aucun commentaire de 13211 ne commencera par 2 (car $13211 \rightarrow 11131221 \rightarrow 3113112211 \rightarrow 132113212221$ dont le début est 13211, et donc les premières décimales recommencent de manière cyclique).

Les nombres qui ne peuvent pas être décomposés sont appelés les éléments, ou atomes. Il faut faire attention : ce n'est pas parce qu'un élément apparaît dans un nombre que le nombre se décompose exactement à cet endroit, car il faut que les découpes soient bonnes : le tableau 4, sur le théorème de la coupure et les éléments, donne la liste de

3. LES TRANSMUTATIONS

01	H	→	H
02	He	→	Hf Pa H Ca Li
03	Li	→	He
04	Be	→	Ge Ca Li
05	B	→	Be
06	C	→	B
07	N	→	C
08	O	→	N
09	F	→	O
10	Ne	→	F
11	Na	→	Ne
12	Mg	→	Pm Na
13	Al	→	Mg
14	Si	→	Al
15	P	→	Ho Si
16	S	→	P
17	Cl	→	S
18	Ar	→	Cl
19	K	→	Ar
20	Ca	→	K
21	Sc	→	Ho Pa H Ca Co
22	Ti	→	Sc
23	V	→	Ti
24	Cr	→	V
25	Mn	→	Cr Si
26	Fe	→	Mn
27	Co	→	Fe
28	Ni	→	Zn Co
29	Cu	→	Ni
30	Zn	→	Cu
31	Ga	→	Eu Ca Ac H Ca Zn
32	Ge	→	Ho Ga
33	As	→	Ge Na
34	Se	→	As
35	Br	→	Se
36	Kr	→	Br
37	Rb	→	Kr
38	Sr	→	Rb
39	Y	→	SrU
40	Zr	→	Y H Ca Tc
41	Nb	→	Er Zr
42	Mo	→	Nb
43	Tc	→	Mo
44	Ru	→	Eu Ca Tc
45	Rh	→	Ho Ru
46	Pd	→	Rh
47	Ag	→	Pd
48	Cd	→	Ag
49	In	→	Cd
50	Sn	→	In
51	Sb	→	Pm Sn
52	Te	→	Eu Ca Sb
53	I	→	Ho Te
54	Xe	→	I
55	Cs	→	Xe
56	Ba	→	Cs
57	La	→	Ba
58	Ce	→	La H Ca Co
59	Pr	→	Ce
60	Nd	→	Pr
61	Pm	→	Nd
62	Sm	→	Pm Ca Zn
63	Eu	→	Sm
64	Gd	→	Eu Ca Co
65	Tb	→	Ho Gd
66	Dy	→	Tb
67	Ho	→	Dy
68	Er	→	Ho Pm
69	Tm	→	Er Ca Co
70	Yb	→	Tm
71	Lu	→	Yb
72	Hf	→	Lu
73	Ta	→	Hf Pa H Ca W
74	W	→	Ta
75	Re	→	Ge Ca W
76	Os	→	Re
77	Ir	→	Os
78	Pt	→	Ir
79	Au	→	Pt
80	Hg	→	Au
81	Tl	→	Hg
82	Pb	→	Tl
83	Bi	→	Pm Pb
84	Po	→	Bi
85	At	→	Po
86	Rn	→	Ho At
87	Fr	→	Rn
88	Ra	→	Fr
89	Ac	→	Ra
90	Th	→	Ac
91	Pa	→	Th
92	U	→	Pa