

4. LE THÉORÈME DE LA COUPURE ET LES ÉLÉMENTS

Certains nombres se décomposent en deux parties qui n'interfèrent plus jamais dans la suite des commentaires successifs. Ainsi 1113213211 se décompose en 11132 et 13211.

Le résultat suivant, obtenu par John Horton Conway, indique tous les endroits où l'on peut faire de telles coupures :

Si le nombre a se termine par un 2 et que b commence par 121, 123, 131, 132, 111, 312, 313, 321, 323, 3112, 3113, 3221 ou 3223, alors le nombre ab peut être coupé en a et b .

Si le nombre a se termine par un 1 ou un 3 et que b commence par 22121, 22123, 22131, 22132, 22111, 22312, 22313, 22321, 22323, 223112, 223113, 223221, ou 223223, alors le nombre ab peut être coupé en a et b .

Les nombres qui ne peuvent plus être coupés s'appellent des éléments.

En étudiant soigneusement ce qui se passe à partir de 1, on voit que les 7 premiers nombres de la suite sont des éléments qui ne réapparaissent plus ensuite (ce sont des éléments instables), et qu'il y a 92 éléments stables qui persistent indéfiniment.

Les éléments stables suffisent toujours dans la suite du développement des commentaires sur l'UN. Quand on connaît leur comportement, on sait décrire totalement l'évolution de la suite.

toutes les bonnes découps. J. Conway a montré que, parmi tous les éléments, il n'y en a que 92 (voir le tableau 2) qui restent présents dans l'univers au cours de son évolution. Le Théorème chimique de J. Conway énonce qu'à partir d'un

certain moment l'univers n'est composé que des 92 éléments (les éléments stables) et qu'à partir de ce moment (pour chaque nombre engendré à partir du 1), les 92 éléments stables sont présents dans l'Univers.

5. LES CYCLES DE BERNARD GERMAIN-BONNE

Voici les 500 premiers chiffres de trois nombres infinis qui sont le commentaire du commentaire du commentaire d'eux-mêmes. Le nombre a a pour commentaire b qui a pour commentaire c qui a pour commentaire a .

$$a = f(f(f(a))) =$$

3123211231132132211231131122211331121321232221123113112221131112311322311211
1311222112132113311213211221121332211231131122211311123113321112131221123113
112221132231131122211211312211311123113322112132113212231121113112221121321
1321222113222122211211232221123113112221131112311332111213122112311311123112
111331121113122112132113121132221123113112221131112311332211322311311222113
1123113322112111312211312113221112131221131112311211232221121321132132
21133122112231131122211211131221131112311231132

$$f(a) = b = f(f(f(b))) =$$

1311121312211213211312111322211213211321322123211211131211121332211213211321
3221133112132113221321123113213221121113122123211211131221222112112322211213
2113213221133112132123123112111311222112132113213221132213211321322112311311
2221133112132123222112111312211312112213211231132132211211131221131211322113
3211322112211213322112132113213221133112132123123112111311222112132113311213
2112312321123113112221121113122113111231133221121321132132211331121321232221
13221321132132211331121321232221123113112221

$$f(f(a)) = c = f(f(f(c))) =$$

1113311211131122211211131221131112311332211211131221131211132211121312211231
1311123112112322211211131221131211132221232112111312211322111312211213211312
111322211231131122112131221123113112211322112211213322112111312211312111322
2123211211131211121311121321123113213221121113122113121113222113221113122113
1211132221121321132132212321121113121112133221123113112221131112212211131221
1213211312111322211231131122211311122113222123122113222122211211232221121113
12211312111322212321121113121112131112132112

Bernard Germain-Bonne a démontré qu'il n'y avait que 4 cycles de longueur 3 et qu'il n'y avait aucun cycle d'une autre longueur.

L'évolution de l'Univers à partir d'un certain moment n'est donc que la transformation des éléments stables les uns en les autres, selon des règles immuables (détaillées sur le tableau 3). Une sorte de bouillonnement complexe, mais parfaitement réglé, détermine l'avenir des commentaires infinis sur l'UN.

La démonstration de ce premier résultat consiste simplement en la vérification des tableaux et en quelques raisonnements arithmétiques. Il ouvre cependant la porte, cette fois en utilisant des méthodes d'algèbre matricielle (triangulation de matrice, calcul de valeurs propres et de vecteurs propres), à la démonstration d'un second résultat que J. Conway appelle le Théorème arithmétique, qui indique des propriétés statistiques de l'évolution des commentaires sur l'UN.

Ce théorème, déjà évoqué, indique que la taille de l'univers augmente exponentiellement à une vitesse égale à 1,30357726903..., et que l'abondance des différents éléments tend vers certaines valeurs fixées non nulles.

Pour un million d'atomes, il y a par exemple, en moyenne, 91 790 atomes d'hydrogène, 27 d'arsenic, 102 d'uranium, 3 237 d'hélium.

Que se passe-t-il lorsque l'on part d'un nombre autre que «1»? Quelques éléments supplémentaires apparaissent – J. Conway les dénomme transuraniens – qui restent présents indéfiniment, mais leur taux d'abondance tend vers zéro, et donc seuls les 92 éléments restent présents avec des taux non négligeables (les mêmes que précédemment) ; l'expansion se fait encore exponentiellement avec le même taux, donnant un accroissement de 30,35 pour cent en moyenne à chaque étape.

Cette fois, Conway n'a pas pu détailler la démonstration, car, dit-il, elle est astronomiquement difficile et nécessite plusieurs dizaines de pages. Il attend qu'on lui en propose une solution simplifiée.

LES COMMENTAIRES CYCLIQUES

Récemment, sans connaître les résultats de J. Conway, Bernard Germain-Bonne, de l'Université de Lille, s'est posé une question nouvelle sur les suites de commentaires numériques.

Existe-t-il des suites numériques infinies qui, lorsqu'on en fait le commentaire, soient égales à elles-mêmes? Une telle suite serait son propre commentaire, comme, dans le cas fini, le nombre 22 est son propre commentaire (22 est la seule suite finie qui soit égale à son commentaire).