

B. Germain-Bonne a répondu non, mais il s'est alors posé la question de savoir s'il pouvait exister des suites numériques infinies (des nombres infinis, en quelque sorte) qui se commentent cycliquement les unes les autres : dans un cycle de période 3, la première serait le commentaire de la deuxième, qui serait le commentaire de la troisième qui serait le commentaire de la première.

L'étude minutieuse qu'il a menée (et qui l'a conduit, lui aussi, à développer une théorie des éléments analogue à celle de J. Conway) a donné la réponse suivante :

Seuls des cycles à trois éléments sont possibles, et il y a en quatre en tout et pour tout. On les obtient par la méthode suivante :

– On part de l'élément Zn, égal à 312 ;

– On calcule le commentaire à trois reprises ; cela donne Cu, puis Ni, puis Zn Co = 31232112, ce qui prolonge le mot de départ ;

– On calcule encore le commentaire trois fois ; cela donne Cu Fe, puis Ni Mn, puis Zn Co Cr Si, soit 312 32112311321322112, ce qui prolonge encore le mot de départ. Etc.

De proche en proche, on obtient une infinité de chiffres qui composent un mot infini qui est «le commentaire du commentaire du commentaire de lui-même».

Le second cycle est obtenu de la même façon en partant de Ho ; son début est Ho Gd Pm Ca Zn Ar Mn. Le troisième et le quatrième sont obtenus en faisant précéder les deux premiers de H = 22

Ces nombres infinis, qui sont exactement égaux au commentaire du commentaire du commentaire d'eux-mêmes, ne sont pas périodiques (jamais les mêmes chiffres ne se répètent dans le même ordre). Leurs décimales représentent donc des nombres irrationnels nouveaux et remarquables. Ils utilisent évidemment les 92 éléments de la chimie du monde numérique de J. Conway, et cela dans des proportions qui sont celles déjà calculées précédemment par J. Conway. Ces nombres infinis sont des mondes complets, stabilisés, autonomes, qui se connaissent parfaitement et qui contiennent en eux-mêmes tous les commentaires (numériques) qu'on peut faire sur eux.

LES COMMENTAIRES ORDONNÉS SONT TOUJOURS CYCLIQUES

Les commentaires que nous avons envisagés jusqu'à présent sont des commentaires exhaustifs : à partir du commentaire, il est possible de recons-

tituer le texte original. En littérature, ce n'est en général pas le cas.

Changeons un peu les règles du jeu du commentaire numérique et écrivons le commentaire d'une suite de nombres, par exemple (9 3 1 2 1 9), en comptant le nombre de «0» s'il y en a, puis le nombre de «1» s'il y en a, etc., et écrivons dans cet ordre les résultats. Ici on obtient (2 1 1 2 1 3 2 9), qui lui-même peut se commenter en (3 1 3 2 1 3 1 9), etc. Que se passe-t-il alors ? Y a-t-il encore expansion infinie pour ce nouveau type de commentaire simplificateur ?

Le problème semble proche du précédent, mais en réalité il est bien plus simple. Hervé Lehning et, indépendamment, Victor Bronstein et Aviezri Fraenkel ont montré que, quel que soit le point de départ, une telle suite finissait toujours par donner un cycle : ces commentaires ordonnés sont donc toujours cycliques et ne donnent jamais lieu à une croissance infinie.

La suite (1) donne par exemple :
(1) (1 1) (2 1) (1 1 1 2) (3 1 1 2) (2 1 1 2 1 3) (3 1 2 2 1 3) (2 1 2 2 2 3) (1 1 4 2 1 3) (3 1 1 2 1 3 1 4) (4 1 1 2 2 3 1 4) (3 1 2 2 1 3 2 4) (2 1 3 2 2 3 1 4) (2 1 3 2 2 3 1 4)

Ce qui est même mieux qu'un cycle, puisque c'est un point fixe.

La suite partant de (6 7) donne rapidement un cycle d'ordre 3. Ce n'est pas un hasard, car Hervé Lehning a montré que seuls 1 2 et 3 pouvaient être des périodes. Mais, aussi puissant que soit ce résultat sur les cycles, il ne résout pas toutes les questions qu'on peut se poser, et je ne sais pas si quelqu'un a réussi à caractériser tous les points fixes, comme (2 1 3 2 2 3 1 4).

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et technologies de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

V. BRONSTEIN et **A. FRAENKEL**, *On a Curious Property of Counting Sequences*, in *American Mathematical Monthly*, pp. 560-563, juin 1994.

J. CONWAY, *The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay*, in *Open Problems in Communication and Computation* (T. Cover Ed.), Springer-Verlag, pp. 173-188, 1987.

M. HILGEMEIR, *Die Gleichniszahlen-Reihe*, in *Bild der Wissenschaft*, n° 12, pp. 194-195, 1986.

H. LEHNING, *Quelle est la meilleure preuve ?*, in *Quadrature*, n° 11, pp. 5-12, 1992.

B. GERMAIN-BONNE, *Mots autodescriptifs et co-descriptifs*, Publication du Laboratoire d'analyse numérique de l'Université de Lille, n° 332, 1994.