

Partage de butin

IAN STEWART

Des protocoles de partage proportionnels, plaisants ou partiels.

Arthur Barberousse renversa le sac sur la table de la cuisine. Jo le Teigneux, Denis Tourtencuisse et Léon la Volette regardaient, émerveillés, les paquets de billets et les tas de bijoux qui en sortirent. Restait le plus difficile : diviser le butin. Personne n'avait confiance et chacun voulait avoir sa part, sans être lésé. La justice, c'est la justice, n'est-ce pas ?

Arthur partagea rapidement l'argent, en se fondant sur la valeur affichée. C'était facile : il suffisait de diviser la valeur totale en quatre. En revanche, le partage des bijoux était plus épineux, car chaque membre de la bande avait son idée sur la valeur des divers bijoux. Certains objets, telles les chaînes, pouvaient se couper en morceaux, ce qui facilitait le travail, mais les autres...

«Ne traînons pas, dit Jo. La police doit être sur nos traces, et tout cela doit disparaître rapidement.

– Je vais prendre cette tiare de diamants, dit Léon, en se la mettant sur la tête. Et Jo aura les colliers et le...

– Pas question, intervint Denis : des canailles de votre espèce ne seront jamais d'accord si elles procèdent ainsi. Il faut une méthode qui nous garantisse à chacun un partage équitable.

– Ouais, dit Léon.»

Silencieux, ils regardèrent le tas de bijoux. Trois heures après, ils le regardaient encore :

«Ce dont nous avons besoin, dit Denis, c'est de ce que les mathématiciens nomment un "protocole de partage proportionnel plaisant", PPPP en abrégé.

– Aïe, dit Arthur. Et c'est quoi, ce truc ?

– Plaisant, c'est lorsque personne n'a le sentiment que quelqu'un d'autre a obtenu quelque chose qu'il ne...

– Je comprends "plaisant", mais les longs mots d'avant ?

– Un "protocole de partage", c'est une méthode systématique pour partager les choses entre plusieurs personnes. Il est "proportionnel" si chaque personne est satisfaite d'avoir reçu au moins sa juste part, et si personne n'estime qu'un autre a eu plus que sa part.

– N'est-ce pas la même chose que plaisant, demanda Léon ?

– Pas du tout.

– Oui, ajouta Denis. Les protocoles plaisants sont toujours proportionnels, mais les protocoles proportionnels ne sont pas nécessairement plaisants.

– Pourquoi ?

– Par exemple, suppose que, tous les trois, vous partagiez trois objets, comme un bracelet, un collier et une paire de boucles d'oreilles, et que vous assigniez subjectivement des valeurs de la façon suivante :

	Bracelet	Collier	Boucles
Arthur	40	50	10
Léon	30	50	20
Jo	30	20	50

Le partage est proportionnel si Arthur reçoit le bracelet, si Léon a le collier et si Jo a les boucles, parce que chacun d'entre vous aura reçu plus de 33 pour cent de la valeur totale, mais Arthur ne trouvera pas plaisant que Léon ait le collier, qu'il estime valoir plus que le bracelet. Comme nous le verrons, les protocoles plaisants sont beaucoup plus difficiles à trouver que les protocoles proportionnels.

En plus du protocole, des stratégies personnelles garantissent à chacun qu'il atteigne son but. Ces stratégies ne font pas partie du protocole ; elles sont d'ailleurs souvent implicites, mais ce sont elles qui garantissent que le protocole est juste. On nomme souvent "joueurs" les personnes entre lesquelles s'effectue le partage, parce qu'on peut envisager ce dernier comme une suite de coups dans un jeu, et l'on peut aussi représenter les valeurs comme des parts d'un gâteau. On se partage le gâteau, quoi.

Pour deux joueurs, par exemple Arthur et Léon, il existe un PPPP simple, que j'appelle «je coupe, tu choisis» : Arthur coupe le gâteau en deux parts égales, et Léon choisit celle des deux parts qu'il préfère. Avec ce protocole, la stratégie d'Arthur doit être de couper des parts égales à son goût, de sorte qu'il ne puisse perdre, quel que soit le choix que fera Léon. Pour Léon, la stratégie doit être de choisir la part qui lui semble la plus grosse. La stratégie d'Arthur lui assure une part qu'il estime à 50 pour cent, et celle de Léon une part que Léon estime supérieur ou égale à 50 pour cent. Le protocole est bien un PPPP.»

Comme Denis semblait bien connaître le problème, les trois autres l'envoyèrent à la bibliothèque de l'université locale pour y dénicher des informations supplémentaires et authentifiées. Denis découvrit que les mathématiques des partages naquirent dans la Pologne en guerre, à Lvov : en 1944, alors que l'armée soviétique combattait pour reprendre la Pologne aux Allemands, le mathématicien Hugo Steinhaus chercha à se changer les idées en résolvant un problème de partage. Il connaissait le protocole "Je coupe, tu choisis" pour partager le gâteau entre deux personnes et les stratégies conduisant chacune d'elles à penser que sa part est au moins égale à la moitié. Avec cette technique, aucun des deux joueurs n'a de raison de se plaindre : celui qui coupe peut faire une découpe impartiale, et celui qui choisit décide ce qu'il veut prendre ; aucun des deux n'est forcé de faire un choix qu'il jugerait injuste.

«Steinhaus, dit Denis quand il revint vers ses trois acolytes, se demanda si on pouvait diviser un gâteau entre trois personnes.

– Voyons, dit Arthur. Peut-être pourrais-je couper le gâteau en trois parts que j'estimerai égales, puis faire choisir Léon et ensuite Jo ?

– Non, protesta Jo : je ne marche pas, car je choisirais ainsi après Léon, et je risquerais d'avoir une part moins grosse que la sienne.»

Denis expliqua alors que Steinhaus avait abouti à une suite de neuf étapes à l'issue de laquelle chaque joueur est satisfait, car il a ce qu'il considère être au moins un tiers du gâteau. Afin d'examiner ce protocole proportionnel, procédons à quelques définitions. Un joueur estime qu'une part est «juste» si la taille de cette part lui semble au moins égale à un tiers ; sinon elle est «injuste». «Passer», à une certaine étape du protocole, c'est ne rien faire. Par commodité, nous parlerons de «taille des parts», mais il s'agit de valeur relative, estimée par un joueur. Tous les jugements sont subjectifs et propres au joueur qui a le trait. Les indications entre parenthèses ne font pas partie du protocole ; ce sont des commentaires sur les stratégies utilisées par les joueurs.

Voici maintenant le protocole de Steinhaus (voir la figure 1) :

1. Arthur coupe le gâteau en trois parts (qu'il juge toutes justes, c'est-à-dire subjectivement égales).

2. Léon peut : soit passer (s'il pense qu'au moins deux parts sont justes) ; soit étiqueter deux parts (qu'il juge injustes) comme «mauvaises».

3. Si Léon passe, Jo choisit une part (qu'il estime juste). Puis Léon choisit une part (qu'il estime juste) et, finalement, Arthur prend la dernière part.

4. Si Léon a étiqueté deux parts mauvaises, on offre à Jo les deux choix qu'avait Léon : passer ou étiqueter deux part «mauvaises». Jo n'a pas à tenir compte du choix de Léon.

5. Si Jo passe, les joueurs choisissent dans l'ordre : Léon, Jo et Arthur (comme pour l'étape 3).

6. Si Jo étiquette deux parts mauvaises, il est d'accord avec Léon qu'une des parts est injuste : Arthur prend cette part (comme il a estimé que toutes les parts étaient justes, il ne peut pas se plaindre).

7, 8 et 9. Les deux parts restantes sont regroupées (Jo et Léon sont d'accord pour estimer que l'ensemble des deux parts représente plus des deux tiers du gâteau) et ils font un «je coupe, tu choisis» (ils ont alors chacun une part juste).

«Pfouhhh..., fit Arthur, c'est pas du gâteau !

— Attends, dit Denis. Vous n'avez encore rien vu. Il y a un problème, car ce protocole est proportionnel, mais il n'est pas plaisant. On peut trouver des cas où chacun estimera avoir sa juste part, mais où Jo, par exemple, trouvera la part de Léon meilleure que la sienne.

Par exemple, si Léon juge le partage d'Arthur juste, alors le protocole s'arrête à l'étape 3, et Arthur et Léon jugent que chaque part est supérieure ou égale à un tiers. Jo obtient alors une part qu'il estimera au moins d'un tiers, d'où un partage proportionnel. Mais si Jo estime que la part d'Arthur est $1/6$ et celle de Léon de $1/2$, il jugera que le partage n'est pas plaisant, car Léon aura mis la main sur une part meilleure que la sienne.

— Et Steinhaus n'a pas trouvé de PPPP pour trois personnes, demanda Léon ?

— Non : il ne s'est pas préoccupé des partages plaisants ; ce problème n'a été résolu que plus tard.»

Nerveusement, Arthur regardait par la fenêtre : pas de signe de la police ?

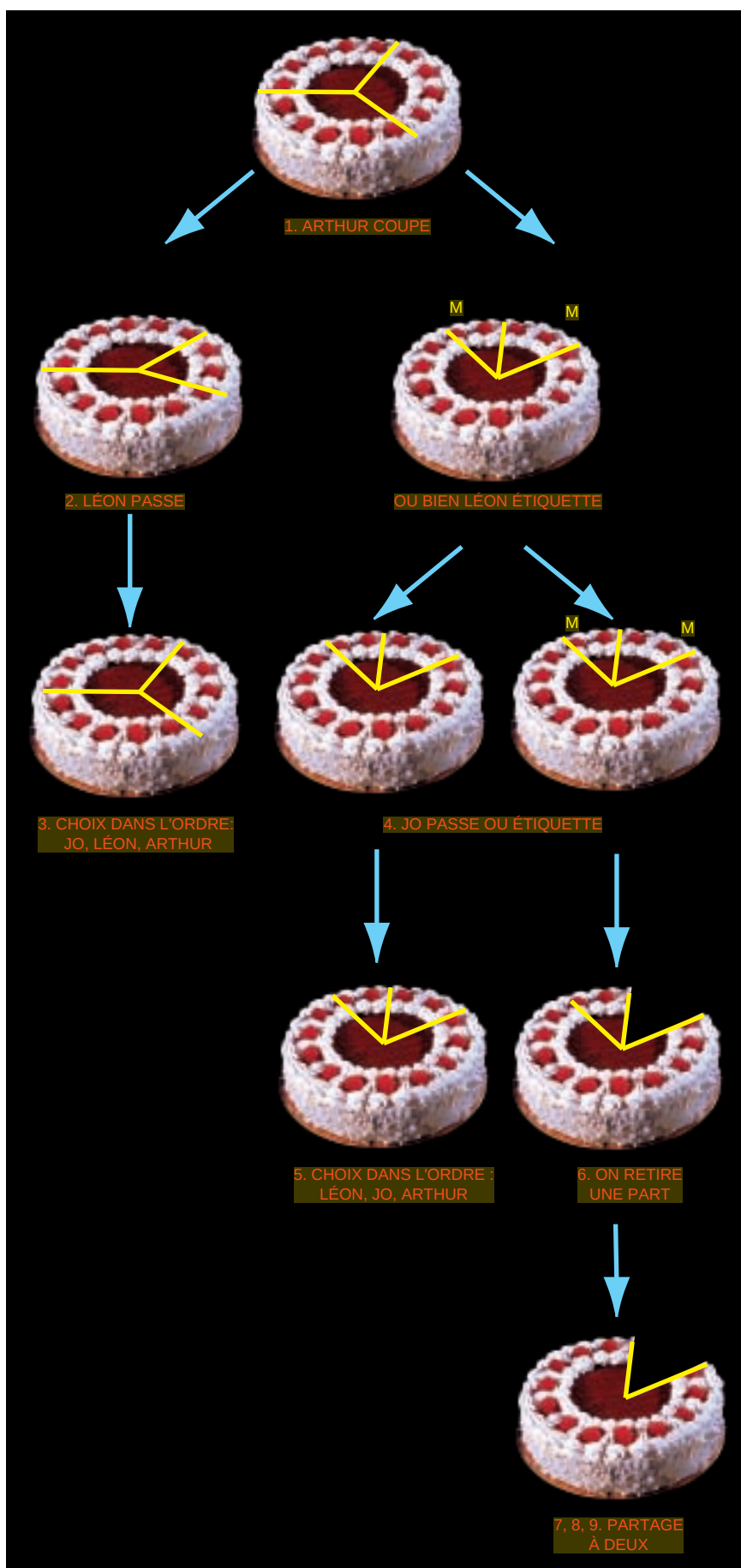
«Ce qui lui importait, continuait Denis, c'était de trouver un protocole de partage proportionnel pour quatre personnes au plus. Ses amis Stefan Banach et B. Knaster en trouvèrent bientôt un.

Supposons que n joueurs $P_1, P_2, \dots, P_n$ se partagent un gâteau. Cette fois, un des joueurs considère qu'une part est "juste" si elle lui semble supérieure ou égale à $1/n$. Le protocole de Banach-Knaster est (voir la figure 2) :

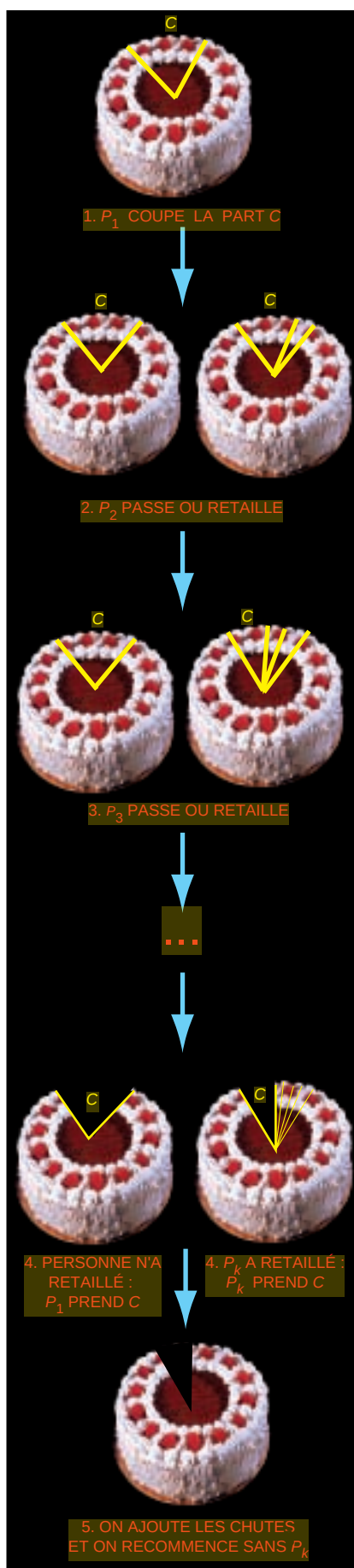
1. P_1 coupe une part (juste) C .

2. P_2 a le choix : de passer (s'il juge C injuste) ; de retailler C (pour former une part juste que nous continuerons de nommer C). Les chutes sont provisoirement laissées de côté.

3. P_3 fait de même avec la nouvelle part C ; puis viennent les tours de $P_4, P_5, \dots, P_n$, de sorte que chaque joueur,



1. Le protocole de Steinhaus.



2. Le début du partage de Banach-Knaster.

sauf P_1 , a eu la possibilité de retailer la part C.

4. Si personne ne retaille la part C, elle revient à P_1 . Si la part est retaillée, elle revient au dernier joueur qui la retaille (car il considère qu'elle est juste, après son coup de couteau).

5. On regroupe le reste du gâteau et les chutes. Les $n-1$ joueurs restants (qui considèrent tous qu'au moins $(n-1)/n$ du gâteau initial restent dans le plat) répètent la procédure précédente.

6. Quand tous les joueurs sont servis sauf deux, ces derniers jouent la fin du gâteau à "je coupe, tu choisies".

Vous voyez : ce protocole de Banach-Knaster est proportionnel, mais il n'est pas plaisant.

— Ouais, dit Léon, et il est différent de celui de Steinhaus. En fait, il est plus simple.

— Absolument, répondit Denis : c'est parce qu'il utilise une nouvelle idée : le redécoupage. Et il reprend de Steinhaus l'idée de découper une part du gâteau et d'étudier ce qui reste.

Léon se cala dans sa chaise et regarda monter lentement la fumée de son cigare :

«Mais dans notre cas, nous ne sommes pas nécessairement d'accord sur ce que vaut chaque partie.

— C'est également vrai pour le partage du gâteau, dit Denis : j'ai toujours pris soin de dire que les parts justes ou injustes ne le sont que subjectivement. D'ailleurs Steinhaus a montré que le problème est plus aisé si les joueurs ne sont pas d'accord.

— Et pourquoi ? C'est bizarre.

— Dans un gâteau, si je préfère le napage de chocolat et toi la génoise de la base, ça nous facilite la vie.»

Arthur grogna pour montrer qu'il comprenait : quand il ne dirigeait pas, il était maussade :

«Denis, ces histoires de protocole sont longuettes, et la police peut venir à tout instant. Existe-t-il de meilleures méthodes que celle de Banach-Knaster ?

— Sûr. Il y a des preuves mathématiques abstraites fondées sur le théorème de complexité de Liapounov : elles démontrent que des divisions équitables du gâteau existent toujours, mais n'indiquent pas comment faire la division. Et puis il y a l'algorithme du couteau qu'on déplace. Celui que je vais vous donner est dû à L. Dubins et à Edwin Spanier, qui l'ont trouvé en 1961 : un joueur coupe un rayon, du gâteau, puis il tourne lentement son couteau, afin de couper des parts d'angle au centre de plus en plus grand. Un joueur qui dit "coupe" reçoit la part qui est formée quand on coupe à l'endroit atteint par le couteau quand il est intervenu. Cette méthode est utile, en famille, pour couper un gâteau, mais ce n'est pas un algorithme, du point de vue mathématique,

parce que chaque joueur doit prendre un nombre infini de décisions pour savoir quand il demande de couper. Les protocoles que l'on cherche doivent reposer sur un nombre fini de décisions.

— Restons à ces protocoles, intervint à nouveau Arthur, sinon la police va finir par rappliquer.

— Tu as raison. J'ai appris qu'au début des années 1960, John Selfridge et John Horton Conway trouvèrent indépendamment un protocole plaisant pour trois joueurs :

1. Arthur partage le gâteau en trois parts (qu'il juge justes).

2. Léon a le choix : de passer (s'il pense que deux parts au moins sont plus grosses qu'une troisième) ; de retailer la part la plus grosse (pour créer deux parts égales et plus grosses que la troisième). Les chutes sont laissées de côté.

3. Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part (qu'ils jugent la plus grosse ou une des plus grosses). Si Léon ne passe pas son tour à l'étape 2, alors il doit choisir la part retaillée, à moins que Jo ne l'ait d'abord choisie. À cette étape, la part de gâteau autre que les restes a été divisée en trois parties de manière plaisante (nous ne l'avons pas démontré, mais c'est vrai).

4. Si Léon a passé, à l'étape 2, il n'y a pas de reste, et l'étape 4 est un coup pour rien ; sinon soit Léon soit Jo a pris la part retaillée. Nommons ce joueur le «non-coupeur», et l'autre des deux le «coupeur». Le coupeur divise les restes en trois parts (qu'il juge justes). Arthur est avantagé par rapport au non-coupeur, parce qu'il pense quand même que ce dernier n'a pas plus qu'une part juste, car il avait coupé des parts initiales justes. Aussi, de quelque sorte que les restes soient à nouveau répartis, Arthur n'enviera pas le non-coupeur.

5. Les trois parts de restes sont choisies par les joueurs dans l'ordre : non-coupeur, Arthur, coupeur. Le non-coupeur choisit le premier, de sorte qu'il n'a pas à se plaindre. Arthur n'enviera pas le non-coupeur, parce qu'il se juge avantagé, et il n'enviera pas le coupeur, car il choisit avant lui. Le coupeur ne se plaindra pas non plus, car c'est lui qui a coupé les restes.

— C'est bien joli, dit Arthur avec impatience, mais nous sommes quatre et non trois, à moins que...»

Il tira un couteau qu'il posa sur la table.

«Eh, pas de panique, dit Denis très vite : il y a quelques années, on a découvert que le partage plaisant existait toujours pour quatre joueurs, mais personne n'avait trouvé de protocole en un nombre fini d'étapes.

— Et alors, demanda Léon. Que s'est-il passé ?