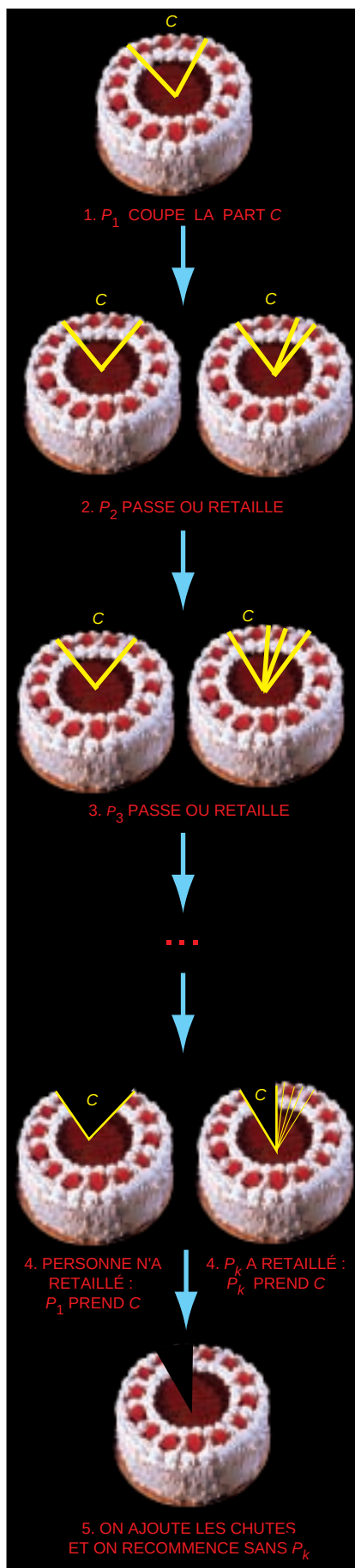




2. Le début du partage de Banach-Knaster.

sauf P_1 , a eu la possibilité de retailer la part C.

4. Si personne ne retaille la part C, elle revient à P_1 . Si la part est retaillée, elle revient au dernier joueur qui la retaille (car il considère qu'elle est juste, après son coup de couteau).

5. On regroupe le reste du gâteau et les chutes. Les $n-1$ joueurs restants (qui considèrent tous qu'au moins $(n-1)/n$ du gâteau initial restent dans le plat) répètent la procédure précédente.

6. Quand tous les joueurs sont servis sauf deux, ces derniers jouent la fin du gâteau à "je coupe, tu choisies".

Vous voyez : ce protocole de Banach-Knaster est proportionnel, mais il n'est pas plaisant.

— Ouais, dit Léon, et il est différent de celui de Steinhaus. En fait, il est plus simple.

— Absolument, répondit Denis : c'est parce qu'il utilise une nouvelle idée : le redécoupage. Et il reprend de Steinhaus l'idée de découper une part du gâteau et d'étudier ce qui reste.

Léon se cala dans sa chaise et regarda monter lentement la fumée de son cigare :

«Mais dans notre cas, nous ne sommes pas nécessairement d'accord sur ce que vaut chaque partie.

— C'est également vrai pour le partage du gâteau, dit Denis : j'ai toujours pris soin de dire que les parts justes ou injustes ne le sont que subjectivement. D'ailleurs Steinhaus a montré que le problème est plus aisé si les joueurs ne sont pas d'accord.

— Et pourquoi ? C'est bizarre.

— Dans un gâteau, si je préfère le napage de chocolat et toi la génoise de la base, ça nous facilite la vie.»

Arthur grogna pour montrer qu'il comprenait : quand il ne dirigeait pas, il était maussade :

«Denis, ces histoires de protocole sont longues, et la police peut venir à tout instant. Existe-t-il de meilleures méthodes que celle de Banach-Knaster ?

— Sûr. Il y a des preuves mathématiques abstraites fondées sur le théorème de complexité de Liapounov : elles démontrent que des divisions équitables du gâteau existent toujours, mais n'indiquent pas comment faire la division. Et puis il y a l'algorithme du couteau qu'on déplace. Celui que je vais vous donner est dû à L. Dubins et à Edwin Spanier, qui l'ont trouvé en 1961 : un joueur coupe un rayon, du gâteau, puis il tourne lentement son couteau, afin de couper des parts d'angle au centre de plus en plus grand. Un joueur qui dit "coupe" reçoit la part qui est formée quand on coupe à l'endroit atteint par le couteau quand il est intervenu. Cette méthode est utile, en famille, pour couper un gâteau, mais ce n'est pas un algorithme, du point de vue mathématique,

parce que chaque joueur doit prendre un nombre infini de décisions pour savoir quand il demande de couper. Les protocoles que l'on cherche doivent reposer sur un nombre fini de décisions.

— Restons à ces protocoles, intervint à nouveau Arthur, sinon la police va finir par rappliquer.

— Tu as raison. J'ai appris qu'au début des années 1960, John Selfridge et John Horton Conway trouvèrent indépendamment un protocole plaisant pour trois joueurs :

1. Arthur partage le gâteau en trois parts (qu'il juge justes).

2. Léon a le choix : de passer (s'il pense que deux parts au moins sont plus grosses qu'une troisième) ; de retailer la part la plus grosse (pour créer deux parts égales et plus grosses que la troisième). Les chutes sont laissées de côté.

3. Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part (qu'ils jugent la plus grosse ou une des plus grosses). Si Léon ne passe pas son tour à l'étape 2, alors il doit choisir la part retaillée, à moins que Jo ne l'ait d'abord choisie. À cette étape, la part de gâteau autre que les restes a été divisée en trois parties de manière plaisante (nous ne l'avons pas démontré, mais c'est vrai).

4. Si Léon a passé, à l'étape 2, il n'y a pas de reste, et l'étape 4 est un coup pour rien ; sinon soit Léon soit Jo a pris la part retaillée. Nommons ce joueur le «non-coupeur», et l'autre des deux le «coupeur». Le coupeur divise les restes en trois parts (qu'il juge justes). Arthur est avantagé par rapport au non-coupeur, parce qu'il pense quand même que ce dernier n'a pas plus qu'une part juste, car il avait coupé des parts initiales justes. Aussi, de quelque sorte que les restes soient à nouveau répartis, Arthur n'enviera pas le non-coupeur.

5. Les trois parts de restes sont choisies par les joueurs dans l'ordre : non-coupeur, Arthur, coupeur. Le non-coupeur choisit le premier, de sorte qu'il n'a pas à se plaindre. Arthur n'enviera pas le non-coupeur, parce qu'il se juge avantagé, et il n'enviera pas le coupeur, car il choisit avant lui. Le coupeur ne se plaindra pas non plus, car c'est lui qui a coupé les restes.

— C'est bien joli, dit Arthur avec impatience, mais nous sommes quatre et non trois, à moins que...»

Il tira un couteau qu'il posa sur la table.

«Eh, pas de panique, dit Denis très vite : il y a quelques années, on a découvert que le partage plaisant existait toujours pour quatre joueurs, mais personne n'avait trouvé de protocole en un nombre fini d'étapes.

— Et alors, demanda Léon. Que s'est-il passé ?

– Alors un journaliste scientifique nommé Dominic Olivastro écrivit un article pour une revue intitulée *The Sciences*, et il intéressa un spécialiste de sciences politiques nommé Steven Brams, de l'Université de New York. S. Brams s'interrogeait depuis longtemps sur les problèmes économiques et politiques de la juste répartition ; il étudiait notamment la division de l'Allemagne entre les Alliés, à la fin de la dernière guerre, et il vit là une piste nouvelle à suivre pour analyser ce type de découpages.

Il commença par chercher un partage plaisant pour trois joueurs, ne comprenant pas que J. Selfridge et J. H. Conway en avaient déjà trouvé un. Dans les trois premières étapes, sa méthode est identique à la leur : elle conduit à un partage plaisant partiel. En revanche, au lieu de leur technique compliquée de division des restes, il conserve la même méthode jusqu'à la fin.

– Ça ne fait que créer d'autres restes, remarqua Léon...

– Oui, mais ces restes de deuxième ordre sont beaucoup plus petits que ceux de premier ordre, et une nouvelle application de la méthode crée des restes de troisième ordre, encore plus petits, et ainsi de suite.

– Mais ce n'est pas un protocole, alors : il ne s'arrête jamais.

– Oui, mais il est simple et efficace.

– Bon, alors allons-y.

– Attends, il y a une dernière méthode, et qui n'est pas infinie. Encouragé par sa découverte, Brams s'attaqua au cas des quatre joueurs, mais il resta bloqué.»

Arthur se remit à tripoter son couteau. Denis, inquiet continua rapidement :

«Alors il s'adressa à un de ses amis, Alan Taylor, qui était mathématicien à Schenectady et qui réfléchit au problème en surveillant un examen de fin d'études. Il trouva une solution qui consistait, de façon étonnante, à partager le gâteau en cinq parts.

– Alors qu'il devait le répartir entre quatre joueurs ? C'est pas clair.

– Oui, et A. Taylor ne sait absolument pas d'où lui est venue cette idée. En tout cas, son protocole plaisant partiel pour quatre joueurs est le suivant :

1. Arthur coupe le gâteau en cinq parties (qu'il juge égales).

2. Léon retaille si nécessaire deux parts, afin d'en créer trois qui puissent être maximales ex aequo (à son avis), et il laisse les deux autres de côté.

3. Jo retaille si nécessaire une part pour créer deux parties maximales ex aequo (à son avis).

4. Je choisis en premier, puis Jo, puis Léon, et enfin Arthur, qui prend la partie restante. Si Jo ou Léon a retailé une