

– Alors un journaliste scientifique nommé Dominic Olivastro écrivit un article pour une revue intitulée *The Sciences*, et il intéressa un spécialiste de sciences politiques nommé Steven Brams, de l'Université de New York. S. Brams s'interrogeait depuis longtemps sur les problèmes économiques et politiques de la juste répartition ; il étudiait notamment la division de l'Allemagne entre les Alliés, à la fin de la dernière guerre, et il vit là une piste nouvelle à suivre pour analyser ce type de découpages.

Il commença par chercher un partage plaisant pour trois joueurs, ne comprenant pas que J. Selfridge et J. H. Conway en avaient déjà trouvé un. Dans les trois premières étapes, sa méthode est identique à la leur : elle conduit à un partage plaisant partiel. En revanche, au lieu de leur technique compliquée de division des restes, il conserve la même méthode jusqu'à la fin.

– Ça ne fait que créer d'autres restes, remarqua Léon...

– Oui, mais ces restes de deuxième ordre sont beaucoup plus petits que ceux de premier ordre, et une nouvelle application de la méthode crée des restes de troisième ordre, encore plus petits, et ainsi de suite.

– Mais ce n'est pas un protocole, alors : il ne s'arrête jamais.

– Oui, mais il est simple et efficace.

– Bon, alors allons-y.

– Attends, il y a une dernière méthode, et qui n'est pas infinie. Encouragé par sa découverte, Brams s'attaqua au cas des quatre joueurs, mais il resta bloqué.»

Arthur se remit à tripoter son couteau. Denis, inquiet continua rapidement :

«Alors il s'adressa à un de ses amis, Alan Taylor, qui était mathématicien à Schenectady et qui réfléchit au problème en surveillant un examen de fin d'études. Il trouva une solution qui consistait, de façon étonnante, à partager le gâteau en cinq parts.

– Alors qu'il devait le répartir entre quatre joueurs ? C'est pas clair.

– Oui, et A. Taylor ne sait absolument pas d'où lui est venue cette idée. En tout cas, son protocole plaisant partiel pour quatre joueurs est le suivant :

1. Arthur coupe le gâteau en cinq parties (qu'il juge égales).

2. Léon retaille si nécessaire deux parts, afin d'en créer trois qui puissent être maximales ex aequo (à son avis), et il laisse les deux autres de côté.

3. Jo retaille si nécessaire une part pour créer deux parties maximales ex aequo (à son avis).

4. Je choisis en premier, puis Jo, puis Léon, et enfin Arthur, qui prend la partie restante. Si Jo ou Léon a retailé une

Le protocole de Brams-Taylor pour quatre joueurs

1. Léon coupe le gâteau en quatre parts (qu'il juge égales) et tend une part à chaque joueur.

2. On demande à Arthur, Jo et Denis s'ils jugent ce partage injuste.

3. Si personne ne se manifeste, on conserve ce partage.

4. Sinon, on poursuit avec le premier qui se manifeste. Supposons que ce soit Arthur. Il choisit une part qu'il envie et la nomme A ; sa part initiale est notée B . Le reste du gâteau est réassemblé.

5. Arthur nomme p un nombre entier supérieur ou égal à 10 (ce nombre p est choisi de sorte qu'il ait la propriété suivante : si A est subdivisé en p parties, Arthur préfère A à B même si les sept plus petites parties sont éliminées. Il peut obtenir cette situation en choisissant p supérieur à $7a(a-b)$, où a est son évaluation de A et b son évaluation de B).

6. Léon divise A et B en p pièces chacune (qu'il pense égales).

7. Arthur choisit trois parts de B (les plus petites) et les nomme S_1, S_2, S_3 . Puis :

– soit il choisit trois parts (les plus grandes) de A (s'il pense qu'elles sont toutes strictement plus grosses que toutes les parts S_1, S_2, S_3) et il retaille au plus deux d'entre elles (à la taille de la plus petite des trois) ;

– soit il subdivise (la plus grande) des parties de A en trois parts (qu'il juge égales).

Quoi qu'il fasse, il nomme ces parts T_1, T_2, T_3 .

8. Jo prend les trois parts S_1, S_2, S_3 et les trois parts T_1, T_2, T_3 et :

– soit il passe (s'il pense avoir déjà deux parts maximales ex aequo) ;

– soit il retaille une de ces parts (la plus grande afin d'avoir deux parts maximales ex aequo).

9. Denis, Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part parmi les six parts $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ modifiées comme à l'étape 8. Jo doit prendre la part qu'il a coupée si elle est disponible. Léon doit choisir une part S , et Arthur doit choisir une part T . À ce stade, on a obtenu un partage

plaisant partiel, avec beaucoup de restes et où Arthur juge sa part supérieure à celle de Léon d'une quantité x .

10. Arthur nomme un entier q (choisi tel que $(4L/5)q$ soit inférieur à x , où L est l'évaluation faite par Arthur des restes). Ce nombre fixé d'avance évitera que la phase suivante ne se poursuive indéfiniment.

11. Arthur partage les restes en cinq parts (cette idée est reprise de la première solution de A. Taylor).

12. Léon retaille deux parts, si nécessaire, pour créer trois parts maximales ex aequo (à son idée), et il met les restes de côté.

13. Jo retaille une part, si nécessaire, pour créer deux parts maximales ex aequo (à son idée).

14. Denis choisit le premier, puis Jo, puis Léon, et Arthur prend la part restante. Si Jo, ou Léon, a retailé une part, il doit la choisir si elle est disponible quand vient son tour.

15. On répète $q-1$ fois les étapes 11 à 14, en divisant à chaque fois les restes du cycle précédent. À la fin de ce cycle, on a un partage plaisant partiel où Arthur a un avantage sur Léon : il juge sa pièce plus grosse que la somme de la part de Léon et de tous les restes. Dans une «liste des avantages irrévocables», on inscrit la paire (Arthur, Léon).

16. Léon coupe les restes en 12 parties (qu'il juge égales).

17. Chacun des trois autres joueurs annonce «oui» s'il pense que les 12 parties ont une même taille, «non» dans le cas contraire.

18. Si tout «oui» a un avantage irrévocable sur chaque «non» (voir la liste), alors on donne les 12 parts aux «oui», chacun en recevant le même nombre et le partage s'arrête (c'est pourquoi on utilise 12 : il est divisible par 1, 2, 3 et 4).

19. Sinon on choisit la première paire (oui, non) pour laquelle on n'a pas un tel avantage irrévocable et on revient à l'étape 4, avec le joueur «oui» dans le rôle d'Arthur, le «non» dans celui de Léon, et les restes à la place du gâteau.

20. On répète les étapes 5 à 18 jusqu'à ce que (après au plus 15 cycles) chaque paire (oui, non) soit sur la liste des avantages irrévocables. Le cycle s'arrête alors à l'étape 18.

pièce, il doit la choisir si elle n'a pas été prise, quand vient son tour.

Par cette méthode, chaque joueur estime que sa part est la plus grosse ou l'une des plus grosses, de sorte que le partage est plaisant.

– C'est bien joli, dit Arthur, mais cela ne résout pas complètement le problème.

– Tu as raison : ce protocole est infini, ce qui ne gênait pas Brams, qui sait qu'en sciences politiques, les miettes ne comptent pas. Toutefois A. Taylor n'était pas satisfait. Pendant plusieurs mois, il étudia le problème, avec William Zwicker et Fred Galvin, jusqu'à ce qu'ils trouvent une manière de modifier la séquence des choix, de sorte que la méthode s'arrête toujours, sans laisser la moindre miette.

Même pour quatre joueurs, le protocole résultant est très compliqué, avec 20 étapes, dont l'une est une longue séquence d'étapes «Je coupe, tu choisis», effectuées par divers joueurs (voir l'encadré ci-dessus). À deux étapes, le protocole demande de considérer un nombre

composé des estimations de certains joueurs sur la taille des parts, et le nombre d'étapes dépend des préférences de chacun. Quelles que soient ces préférences, le nombre d'étapes est fini, mais il peut être rendu aussi grand que l'on veut, selon les préférences des divers joueurs. Contrairement à la méthode initialement trouvée par A. Taylor, ce protocole commence plus classiquement par une division en quatre parts ; au cours du protocole, on retrouve plusieurs fois l'idée de découper en plus de parts que de joueurs, à propos des restes.»

Arthur, Léon, Jo et Denis se lancèrent alors dans le partage du butin par la méthode de Brams-Taylor. Deux heures après, la table était couverte de feuilles de papier où s'alignaient de longs calculs. Arthur regardait une grosse éme-raude solitaire :

«Je pense qu'il faut la diviser en douze, dit-il en lançant un regard furieux à Denis. – Oui, bon... le protocole s'applique aux gâteaux et à tout ce qui peut être divisé

facilement. Hum... Le problème, avec les objets indivisibles, est beaucoup plus difficile, voire sans solution pour... Eh, attends ! Freddie le receleur pourrait couper cette pierre.

– Je ne veux pas de Freddie dans cette affaire. Tu nous a fait perdre un temps précieux et je n'aime pas ça. La police doit être sur nos traces, et c'est ta...»

Il s'arrêta : une sirène approchait. Il reprit :

«A mon avis, les gars, il est temps de passer à un protocole disproportionné et plaisant seulement pour moi.»

Il pointa son couteau vers Denis :

«Je coupe ?

– Oui, et je choisirai, dit Léon.»

Ian Stewart est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.

S. BRAMS et A. TAYLOR, An envy-free cake division protocol, in The American Mathematical Monthly, vol. 102, pp.9-18, janvier 1995.