

Le protocole de Brams-Taylor pour quatre joueurs

1. Léon coupe le gâteau en quatre parts (qu'il juge égales) et tend une part à chaque joueur.

2. On demande à Arthur, Jo et Denis s'ils jugent ce partage injuste.

3. Si personne ne se manifeste, on conserve ce partage.

4. Sinon, on poursuit avec le premier qui se manifeste. Supposons que ce soit Arthur. Il choisit une part qu'il envie et la nomme A ; sa part initiale est notée B . Le reste du gâteau est réassemblé.

5. Arthur nomme p un nombre entier supérieur ou égal à 10 (ce nombre p est choisi de sorte qu'il ait la propriété suivante : si A est subdivisé en p parties, Arthur préfère A à B même si les sept plus petites parties sont éliminées. Il peut obtenir cette situation en choisissant p supérieur à $7a(a-b)$, où a est son évaluation de A et b son évaluation de B).

6. Léon divise A et B en p pièces chacune (qu'il pense égales).

7. Arthur choisit trois parts de B (les plus petites) et les nomme S_1, S_2, S_3 . Puis :

– soit il choisit trois parts (les plus grandes) de A (s'il pense qu'elles sont toutes strictement plus grosses que toutes les parts S_1, S_2, S_3) et il retaille au plus deux d'entre elles (à la taille de la plus petite des trois) ;

– soit il subdivise (la plus grande) des parties de A en trois parts (qu'il juge égales).

Quoi qu'il fasse, il nomme ces parts T_1, T_2, T_3 .

8. Jo prend les trois parts S_1, S_2, S_3 et les trois parts T_1, T_2, T_3 et :

– soit il passe (s'il pense avoir déjà deux parts maximales ex aequo) ;

– soit il retaille une de ces parts (la plus grande afin d'avoir deux parts maximales ex aequo).

9. Denis, Jo, Léon et Arthur, dans cet ordre, choisissent une part parmi les six parts $S_1, S_2, S_3, T_1, T_2, T_3$ modifiées comme à l'étape 8. Jo doit prendre la part qu'il a coupée si elle est disponible. Léon doit choisir une part S , et Arthur doit choisir une part T . À ce stade, on a obtenu un partage

plaisant partiel, avec beaucoup de restes et où Arthur juge sa part supérieure à celle de Léon d'une quantité x .

10. Arthur nomme un entier q (choisi tel que $(4L/5)q$ soit inférieur à x , où L est l'évaluation faite par Arthur des restes). Ce nombre fixé d'avance évitera que la phase suivante ne se poursuive indéfiniment.

11. Arthur partage les restes en cinq parts (cette idée est reprise de la première solution de A. Taylor).

12. Léon retaille deux parts, si nécessaire, pour créer trois parts maximales ex aequo (à son idée), et il met les restes de côté.

13. Jo retaille une part, si nécessaire, pour créer deux parts maximales ex aequo (à son idée).

14. Denis choisit le premier, puis Jo, puis Léon, et Arthur prend la part restante. Si Jo, ou Léon, a retailé une part, il doit la choisir si elle est disponible quand vient son tour.

15. On répète $q-1$ fois les étapes 11 à 14, en divisant à chaque fois les restes du cycle précédent. À la fin de ce cycle, on a un partage plaisant partiel où Arthur a un avantage sur Léon : il juge sa pièce plus grosse que la somme de la part de Léon et de tous les restes. Dans une «liste des avantages irrévocables», on inscrit la paire (Arthur, Léon).

16. Léon coupe les restes en 12 parties (qu'il juge égales).

17. Chacun des trois autres joueurs annonce «oui» s'il pense que les 12 parties ont une même taille, «non» dans le cas contraire.

18. Si tout «oui» a un avantage irrévocable sur chaque «non» (voir la liste), alors on donne les 12 parts aux «oui», chacun en recevant le même nombre et le partage s'arrête (c'est pourquoi on utilise 12 : il est divisible par 1, 2, 3 et 4).

19. Sinon on choisit la première paire (oui, non) pour laquelle on n'a pas un tel avantage irrévocable et on revient à l'étape 4, avec le joueur «oui» dans le rôle d'Arthur, le «non» dans celui de Léon, et les restes à la place du gâteau.

20. On répète les étapes 5 à 18 jusqu'à ce que (après au plus 15 cycles) chaque paire (oui, non) soit sur la liste des avantages irrévocables. Le cycle s'arrête alors à l'étape 18.

pièce, il doit la choisir si elle n'a pas été prise, quand vient son tour.

Par cette méthode, chaque joueur estime que sa part est la plus grosse ou l'une des plus grosses, de sorte que le partage est plaisant.

– C'est bien joli, dit Arthur, mais cela ne résout pas complètement le problème.

– Tu as raison : ce protocole est infini, ce qui ne gênait pas Brams, qui sait qu'en sciences politiques, les miettes ne comptent pas. Toutefois A. Taylor n'était pas satisfait. Pendant plusieurs mois, il étudia le problème, avec William Zwicker et Fred Galvin, jusqu'à ce qu'ils trouvent une manière de modifier la séquence des choix, de sorte que la méthode s'arrête toujours, sans laisser la moindre miette.

Même pour quatre joueurs, le protocole résultant est très compliqué, avec 20 étapes, dont l'une est une longue séquence d'étapes «Je coupe, tu choisis», effectuées par divers joueurs (voir l'encadré ci-dessus). À deux étapes, le protocole demande de considérer un nombre

composé des estimations de certains joueurs sur la taille des parts, et le nombre d'étapes dépend des préférences de chacun. Quelles que soient ces préférences, le nombre d'étapes est fini, mais il peut être rendu aussi grand que l'on veut, selon les préférences des divers joueurs. Contrairement à la méthode initialement trouvée par A. Taylor, ce protocole commence plus classiquement par une division en quatre parts ; au cours du protocole, on retrouve plusieurs fois l'idée de découper en plus de parts que de joueurs, à propos des restes.»

Arthur, Léon, Jo et Denis se lancèrent alors dans le partage du butin par la méthode de Brams-Taylor. Deux heures après, la table était couverte de feuilles de papier où s'alignaient de longs calculs. Arthur regardait une grosse éme-raude solitaire :

«Je pense qu'il faut la diviser en douze, dit-il en lançant un regard furieux à Denis. – Oui, bon... le protocole s'applique aux gâteaux et à tout ce qui peut être divisé

facilement. Hum... Le problème, avec les objets indivisibles, est beaucoup plus difficile, voire sans solution pour... Eh, attends ! Freddie le receleur pourrait couper cette pierre.

– Je ne veux pas de Freddie dans cette affaire. Tu nous a fait perdre un temps précieux et je n'aime pas ça. La police doit être sur nos traces, et c'est ta...»

Il s'arrêta : une sirène approchait. Il reprit :

«A mon avis, les gars, il est temps de passer à un protocole disproportionné et plaisant seulement pour moi.»

Il pointa son couteau vers Denis :

«Je coupe ?

– Oui, et je choisirai, dit Léon.»

Ian Stewart est professeur de mathématiques à l'Université de Warwick.

S. BRAMS et A. TAYLOR, An envy-free cake division protocol, in The American Mathematical Monthly, vol. 102, pp.9-18, janvier 1995.

Respirations

SHAWN CARLSON

Mesurer le métabolisme de petits organismes.

Pas de vie sans métabolisme : tout être qui respire obtient de l'énergie en oxydant chimiquement des molécules énergétiques stockées dans ses tissus. Malgré la simplicité de ce principe, les biologistes n'ont élucidé que les bases du métabolisme, et la vie est si variée, si complexe que nombre de découvertes attendent ceux qui explorent avec rigueur le fonctionnement des animaux et des végétaux. Peu d'amateurs seront capables de résoudre les nombreuses difficultés techniques ou éthiques des expériences sur les animaux à sang chaud, mais les quelque dix millions d'espèces de petite taille et à sang froid leur seront utiles. Les insectes, notamment, sont une mine pour les biologistes amateurs.

La mesure du métabolisme d'un insecte est très simple : lorsqu'un organisme est enfermé dans un récipient clos, sa respiration provoque la disparition de molécules d'oxygène et la libération de dioxyde de carbone. Généralement le nombre de molécules libérées est inférieur à celui des molécules captées, de sorte que la pression dans le récipient est réduite.

Cette baisse de pression est une bonne indication du métabolisme. On la mesure à l'aide d'un appareil de Warburg (voir la figure 1), composé de deux tubes à essai communiquant par un tube capillaire : une minuscule gouttelette d'huile qui s'y déplace révèle les différences de pression entre les deux tubes à essai. Cet appareil est très sensible, et la goutte se déplace même si l'on chauffe l'un des tubes à essai en le tenant dans la main : la pression de l'air augmente dans ce tube et pousse la gouttelette vers le tube plus froid. Pour mesurer le déplacement de la goutte, photocopiez une règle graduée en millimètres et fixez la photocopie sur le tube capillaire.

Comme le système est très sensible, un bon moyen d'obtenir l'égalité des températures dans les deux tubes consiste à les immerger dans une grande cuvette d'eau, en les fixant aux bords d'un gobelet en matière plastique qu'on lèste avec du sable, des cailloux ou des pièces de monnaie. Le système indiqué sur la figure 1 permet de visualiser la goutte d'huile du tube capillaire dans une zone qui reste en atmosphère d'air sec. Pour

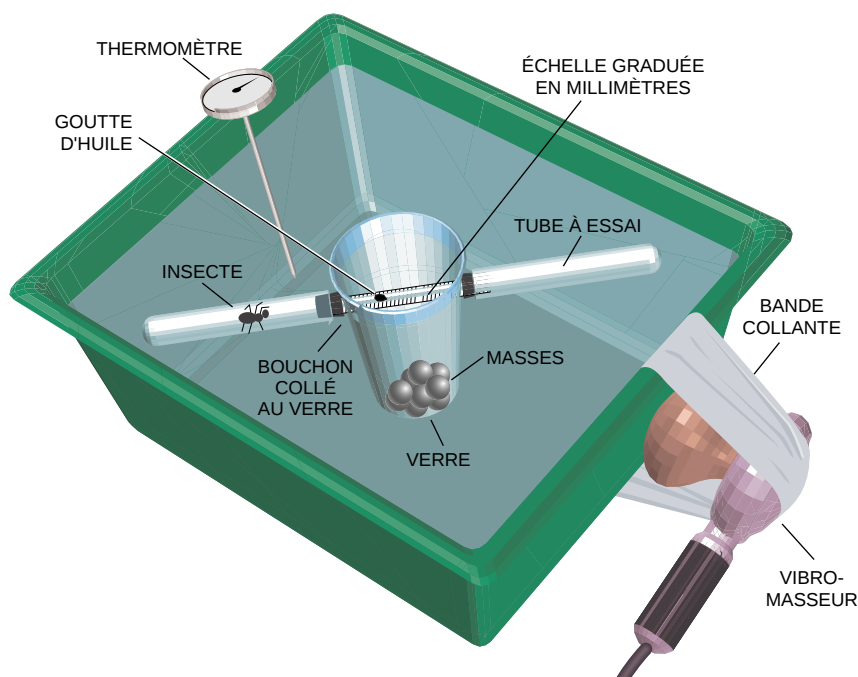
réduire encore les risques de gradients de température, on peut mettre l'eau en mouvement à l'aide d'un agitateur ou d'un vibromasseur. Connaissant la pression de l'air, la température de l'eau et le déplacement de la goutte d'huile, on détermine le nombre de molécules inhalées par l'insecte (voir l'encadré de la page 107).

Combien de molécules de dioxyde de carbone ont-elles été absorbées et combien de molécules d'oxygène ont-elles été libérées ? Le rapport de ces deux nombres, nommé quotient respiratoire, est une mesure fondamentale du métabolisme, car il révèle quel combustible biologique l'organisme utilise. Quand l'organisme brûle des glucides, ce rapport est égal à 1 ; quand il brûle des graisses, il est égal à 0,70 ; avec des protéines, il est égal à 0,80 ; avec de l'alcool, il vaut 0,67. Pour la plupart des êtres vivants, ce quotient est compris entre 0,72 et 0,97, parce que les organismes métabolisent simultanément plusieurs types de molécules.

Pour mesurer le quotient respiratoire, je vous propose d'utiliser un peu d'hydroxyde de sodium (NaOH), afin d'absorber le dioxyde de carbone présent dans l'air. On trouve ce composé sous forme solide dans les drogueries (soude en pastilles ou en paillettes) ou dans les magasins de produits chimiques (consultez les pages jaunes de l'annuaire). Prenez quelques précautions : l'hydroxyde de sodium est une substance caustique, qui brûle la peau et les yeux ; aussi ne la manipulez qu'en portant des gants de caoutchouc et des lunettes.

Avant de commencer les expériences, éliminez le dioxyde de carbone des tubes à essai. Placez plusieurs grammes de soude dans un seul des tubes à essai, à l'aide d'un bas de nylon ; ce sera une poche idéale qui, si elle est roulée en boule du côté ouvert, empêchera l'insecte de toucher la soude. Mesurez la durée du déplacement de la gouttelette jusqu'à son immobilisation, c'est-à-dire jusqu'au moment où la soude a absorbé tout le dioxyde de carbone de l'air. Si vous voulez que le système atteigne rapidement l'équilibre, utilisez beaucoup de soude (on pourrait s'inquiéter de la présence de vapeur d'eau, que la soude absorbe également, mais cette absorption ne perturbe pas les mesures).

Pour réaliser les expériences, on placera dans l'un des tubes à essai la soude enveloppée dans le bas et l'animal étudié ; dans l'autre tube, on ne met que la soude. Puis on mesure le temps nécessaire pour que la gouttelette se déplace d'au moins cinq fois le plus petit intervalle repérable sur la graduation. On répète alors l'expérience, pendant la même durée, mais en présence seulement de



1. La respiration d'un insecte se détecte à la différence de pression que l'on mesure entre deux tubes à essai thermostatés. Cette dernière est mesurée grâce au déplacement d'une gouttelette d'huile dans un tube capillaire.