



LE BAIN est un rituel quotidien qui peut durer une heure. C'est un moment privilégié, pendant lequel l'oozie frotte son éléphant, le lave et noue des liens avec lui. Les éléphants vivant en moyenne entre 50 et 60 ans, parfois même jusqu'à 80 ans, cette relation peut durer toute une vie.



Michael SCHMIDT est vétérinaire au zoo de Portland.

La couverture

IAN STEWART

Quelle est la plus petite surface recouvrant une courbe de longueur unité ?

Le problème de la «Couverture de maman Ver» consiste à déterminer la plus petite surface à deux dimensions capable de recouvrir toute courbe d'un seul tenant de longueur unité. Cette singulière appellation s'éclaire quand on considère que la surface est une couverture et la courbe comme un bébé ver endormi. Sa mère a besoin de ce que nous appellerons une couverture universelle – une couverture qui recouvre bébé ver quelle que soit sa position. Il y a quelques décennies, le mathématicien Leo Moser, de l'Université de l'Alberta, au Canada, posa une question déconcertante, restée jusqu'à ce jour sans réponse : quelle est la forme de la couverture universelle d'aire minimale ?

Pour le problème général, une solution évidente est un disque circulaire de rayon unité, dont l'aire est π , soit 3,141... Si le centre du disque est placé sur la tête

de bébé ver, sa queue est au plus à une unité de distance. En 1973, Jnarnetk Gerriets et George Pool, de l'Université d'État d'Emporia, décrivent une couverture pentagonale n'ayant qu'une aire de 0,286... Jusqu'à récemment, personne ne fit mieux. Mais, il y a quelques mois, David Reynolds, de la *Credence Systems Corporation*, à Beaverton, Oregon, me fit parvenir une démonstration selon laquelle une couverture en forme d'un certain quadrilatère d'aire $(4 + \sqrt{3})/24$, environ 0,239, est universelle.

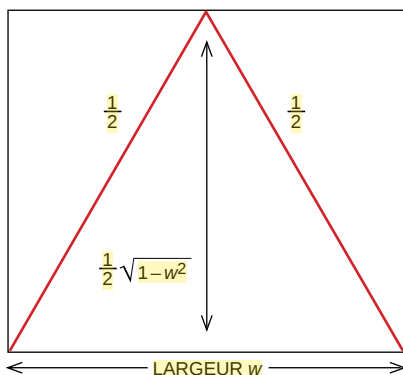
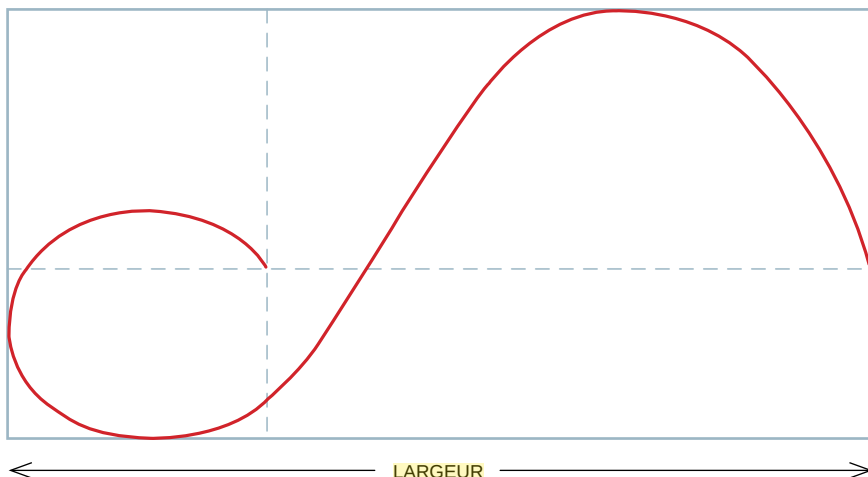
Résultat dramatique : une certaine variation de sa méthode pourrait conduire à des couvertures universelles encore plus petites. Toutes les solutions seront les bienvenues dans «Réaction», mais, s'il vous plaît, joignez une démonstration – ou une solide preuve expérimentale – du caractère universel de votre surface.

LE PATCHWORK

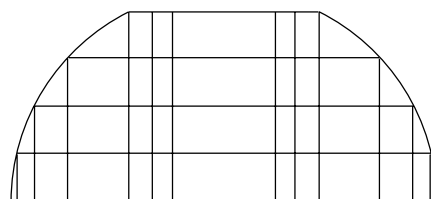
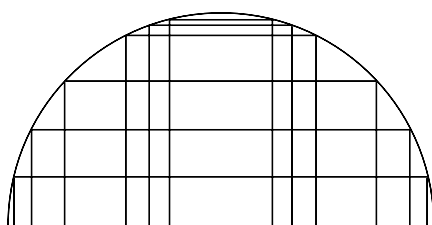
Pour illustrer la méthode de D. Reynolds, nous allons l'utiliser pour montrer qu'un demi-cercle de diamètre unité – de surface $\pi/8$, environ 0,392 – est universel. Étant donné une position du bébé ver, traçons le segment joignant sa tête et sa queue (ou, s'il s'est lové en boucle, un segment quelconque coupant son corps). Puis trouvons le plus petit rectangle entourant le bébé ver ayant deux côtés parallèles au segment (voir la figure 1). Appelons le rectangle une parcelle. Sa largeur, w , est comprise entre 0 et 1. Pour chaque valeur de w , nous pouvons estimer la hauteur du rectangle. La plus grande hauteur pour toute parcelle, égale à $\sqrt{1 - w^2}/2$, est obtenue lorsque le bébé ver s'endort en forme de triangle isocèle.

Nous avons ainsi identifié une famille de parcelles, une pour chaque w , qui est «collectivement» universelle. Quelle que soit la manière dont bébé ver s'est lové, une au moins de ces parcelles le recouvre. Nous pouvons construire une couverture universelle en les surimposant. D. Reynolds appelle cette opération le patchwork de bébé ver, encore qu'elle évoque plutôt un recouvrement : les bords n'ont pas besoin d'être jointifs et, en fait, plus ils se recouvrent et mieux c'est. Qu'importe la manière dont les parcelles sont arrangées, la région qu'elles recouvrent est toujours universelle. Pour voir cela, imaginons que le bébé ver se soit enroulé et trouvons alors une parcelle qui le recouvre. Comme le patchwork de bébé ver contient cette parcelle, il recouvrira le bébé ver.

Notre tâche suivante est de recouvrir les parcelles pour obtenir l'édredon minimal. Si elles sont disposées symétriquement et à bases alignées, elles couvrent un demi-cercle de rayon unité. En conséquence, un tel demi-cercle est bien universel. Mais il n'y a pas de raison spéciale de choisir cet arrangement, ni de prendre des parcelles rectangulaires, et enfin il n'est pas indispensable d'utiliser la totalité des largeurs, de 0 à 1.



1. On associe des parcelles rectangulaires pour recouvrir toute courbe de longueur un (en haut). La parcelle la plus grande est celle qui doit recouvrir les deux côtés égaux d'un triangle isocèle (à gauche). La famille formée par la totalité de ces parcelles peut être disposée de sorte qu'elles recouvrent un demi-cercle (au centre). Et l'on peut encore en rogner le sommet pour obtenir une couverture universelle d'aire encore plus petite (à droite).



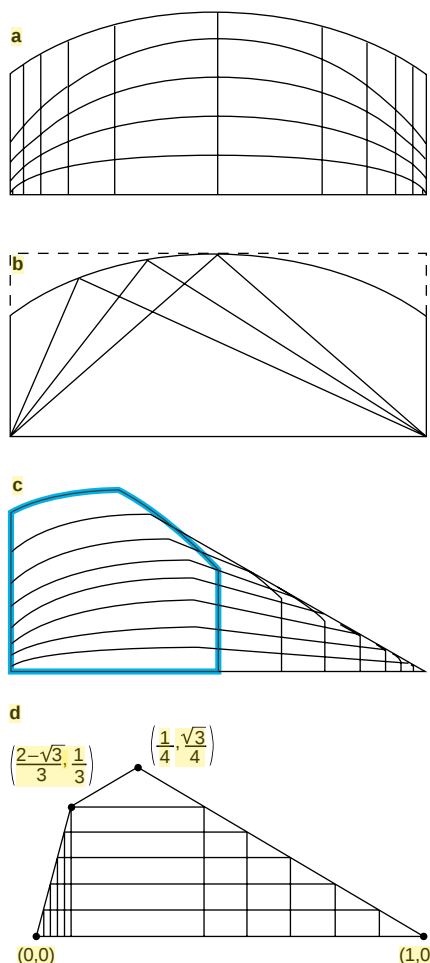
2. On obtient des couvertures plus petites (a) avec des parcelles ayant un bord elliptique (b). Quand on examine comment bébé ver peut se lover sous la couverture, on obtient des améliorations supplémentaires (c). La plus petite couverture connue a une aire égale à 0,299... (d).

Lorsque $w = \sqrt{5}/5$, la parcelle est carrée, et toute parcelle de hauteur supérieure à $\sqrt{5}/5$ peut être tournée de 90 degrés, après quoi sa nouvelle hauteur est inférieure à $\sqrt{5}/5$. Si l'on omet ces dernières parcelles dans le demi-cercle, on réduit ce dernier à une zone aplatie, d'aire réduite, mais qui reste universelle.

Un raisonnement à peine plus complexe impliquant de faire tourner bébé ver lui-même conduit D. Reynolds à conclure qu'en fait on peut retirer toutes les parcelles pour lesquelles w est inférieur à $1/2$. Qui plus est, la hauteur maximale de la parcelle n'est nécessaire qu'au milieu, et chaque parcelle peut être limitée par un arc d'ellipse. Quand on tient compte de ces améliorations, on obtient la couverture représentée sur la figure de droite. À première vue, il peut sembler que nous ayons poussé la méthode à son extrême limite, mais la couverture peut encore être rognée. Ainsi, si bébé ver touche la limite elliptique de la parcelle, disons à gauche de son milieu, alors il ne peut la toucher aussi à droite. De la sorte, nous pouvons éliminer une partie du coin supérieur droit de chaque parcelle. La réunion des parcelles résultantes conduit à une couverture limitée par un arc d'ellipse et trois segments.

En construisant ces parcelles, nous avons supposé que la tête et la queue de bébé ver restaient en quelque sorte fixées sur le sol. L'arc elliptique de la frontière provient d'une seule parcelle, celle de largeur $1/2$ (représentée en bleu sur l'illustration c à droite). Mais tout ver recouvert par cette parcelle peut être glissé vers l'extrémité droite de la couverture, où il reste beaucoup d'espace libre. En envisageant plusieurs formes clés pour le ver, D. Reynolds montra que l'arc d'ellipse et le segment vertical de notre précédente couverture pouvaient être remplacés par deux segments de droites. Le résultat est une couverture d'aire de seulement 0,239... comme nous l'avons mentionné.

Lorsqu'on approfondit ce type d'optimisation géométrique, il est souhaitable de garder à l'esprit qu'il peut ne pas exister de solution optimale. Même si l'on trouve une suite de solutions, chacune meilleure que la précédente, une telle suite peut ne pas converger ou converger vers quelque chose qui ne soit pas optimal. Richard Courant et Herbert Robbins introduisirent un bon exemple de ce cas dans leur ouvrage classique *What*



Is Mathematics? C'est un problème que j'appelle : «La tente de maman mouche». Bébé mouche dort sur un sol plat, une patte tendue en l'air. Sa maman le recouvre d'une couverture qui, telle une tente, touche le sol de tous côtés. Quelle tente a l'aire la plus petite ?

Une tente conique à base circulaire convient et, à hauteur donnée, sa sur-

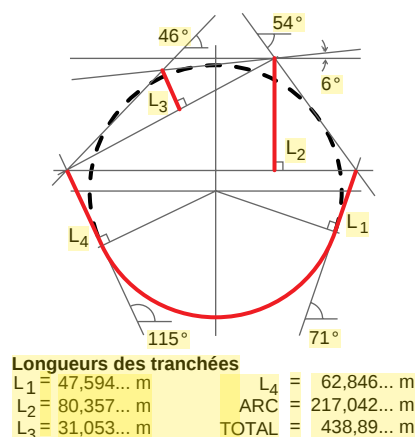
face décroît lorsque celle de sa base décroît. En fait, on peut trouver une tente d'aire aussi petite que l'on veut, ce qui est impossible. Un cône de base d'aire 0 n'est pas une surface, mais un segment de droite, de sorte qu'il ne saurait recouvrir bébé mouche en un sens raisonnable. Ainsi, pour la «tente de maman mouche», il n'y a pas de solution optimale – si l'on exige que la tente soit une surface.

Aussi n'est-il pas évident que «la couverture de maman ver» ait une solution définitive. Cela dépend du type de couverture que l'on considère. Tous les vers polygonaux de longueur 1, par exemple, peuvent être recouverts par une couverture d'aire nulle. De telles couvertures existent en grand nombre, mais elles sont pleines... de trous : le problème pourrait alors être plus adéquatement désigné comme «Filet de maman anguille». À l'opposé, John Marstrand, de l'Université de Bristol, Angleterre, prouva en 1979 qu'aucune couverture d'aire nulle ne saurait couvrir tout ver régulier (par régulier, j'entends une courbe ayant une tangente en tout point). Le résultat de J. Marstrand suggère que la couverture de maman ver possède une solution bien définie, une solution intéressante. Peut-être bien celle de D. Reynolds.

Mais les mathématiciens amateurs peuvent encore trouver du plaisir à essayer d'en trouver de meilleures. Qui plus est, le problème admet de nombreuses variations, presque toutes non résolues : existe-t-il une couverture universelle de périmètre minimum ? Et que dire du «Sac de couchage de bébé serpent», un sac qui doit contenir un serpent de longueur un, quelle que soit la manière dont il se contorsionne en trois dimensions ? Et pouvez-vous examiner le problème des vers qui vivent à la surface d'une sphère ?

Réaction

John Day, de Columbus, Ohio, m'envoie une série de lettres à propos de «Un drain peut en cacher un autre» (*Pour la Science*, n° 216 et «Réaction» *Pour la Science*, n° 219). Il propose d'abord une solution à deux tranchées de longueur totale 440,64... mètres, qui améliore celle indiquée dans «Réaction» de *Pour la Science*, n° 219. Mais sa lettre indique une solution avec trois tranchées, encore meilleure puisque sa longueur totale est de 43,89... mètres (représentée ci-contre). Quelqu'un proposera-t-il une meilleure solution à quatre tranchées ?



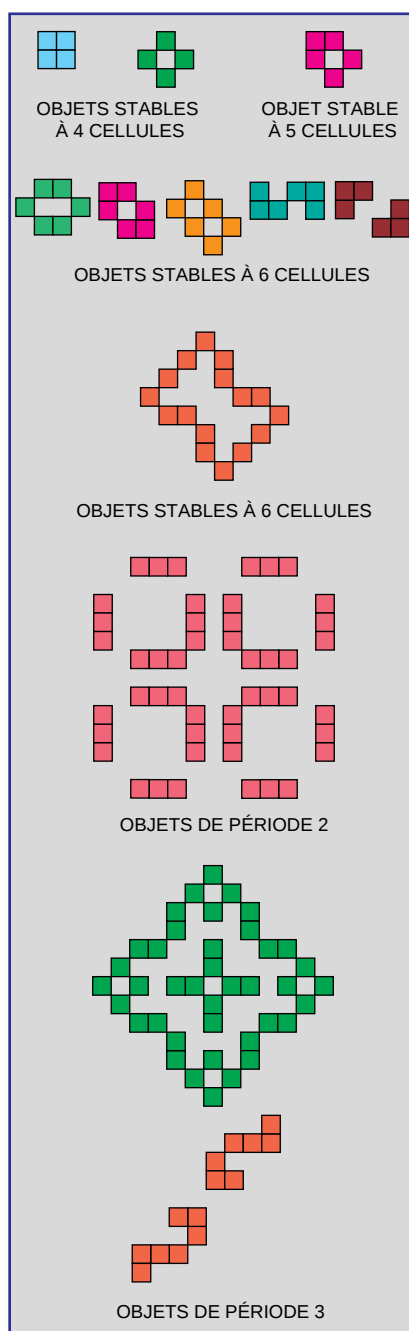
Le Jeu de la vie, toujours vivant...

JEAN-PAUL DELAHAYE

Depuis 25 ans, les biologistes du Jeu de la vie explorent une planète riche et étrange.

John Conway fixa les règles du *Jeu de la vie* il y a 25 ans et créa une science nouvelle. Depuis, les spécialistes ont poursuivi l'exploration d'un monde dont la définition tient en trois lignes, mais dont la richesse semble inépuisable. La discipline est à la croisée des chemins de la physique – on y construit des machines –, de la biologie – les êtres qu'on y étudie sont des cellules qui naissent et meurent –, des mathématiques – on y prouve parfois des théorèmes – et de l'informatique – les ordinateurs y jouent le rôle de microscopes. Ces cinq dernières années, une bande de passionnés du jeu a beaucoup fait progresser la discipline. Le monde du *Jeu de la vie* est un plan infini quadrillé dont chaque case est, soit occupée par une cellule, soit vide. Chaque case possède huit voisins et, d'une génération à l'autre, des naissances et des décès s'y déroulent mécaniquement selon la règle simplissime de Conway : si une case est vide et que trois de ses voisins sont occupées, alors une naissance s'y produit (étrange sexualité!) ; si une case est occupée, la survie n'y est possible que si deux ou trois cases voisines sont occupées ; dans tous les autres cas, la case se retrouve vide à la génération suivante. En résumé, naissance si 3 voisins, survie si 2 ou 3 voisins.

Ces règles, choisies parce qu'elles sont assez naturelles (la vie nécessite déjà de la vie, mais trop de vie provoque l'étouffement) et qu'elles engendrent un monde inattendu, ont dépassé toutes les espérances de son créateur. Toutefois les mathématiciens, qui savent traiter des problèmes d'une abstraction et d'une difficulté étourdissante, sont assez démunis pour résoudre la plupart des problèmes que pose cette biologie : lorsqu'ils les résolvent, c'est d'une façon peu satisfaisante, comme nous allons le voir. Cet incapacité laisse le champ ouvert aux étranges ingénieurs-biologistes à qui l'on doit les progrès récents que nous allons présenter.



1. Configurations stables et configurations périodiques du *Jeu de la vie*.

CROISSANCES INFINIES ET CROISSANCES RAPIDES

Après avoir constaté que certaines figures (configurations de cellules) sont stables, que d'autres sont périodiques (on en connaît des centaines maintenant), diverses questions se posent. La première est : une population de cellules peut-elle croître indéfiniment ?

La réponse, positive, a été donnée dès 1970 par des étudiants du MIT ; cependant de nouvelles démonstrations plus simples de ce résultat sont disponibles et la figure 2 en indique deux tout à fait amusantes trouvées en 1992 et 1993 : l'*Extenseur* et le *Chasse-neige*. À chaque fois, ces configurations avancent en laissant derrière elles une traînée. Cette traînée, stable pour le *Chasse-neige*, est en mouvement périodique pour l'*Extenseur*. Si vous placez un obstacle sur le chemin de ces configurations, ne serait-ce qu'un bloc de quatre cellules formant un carré (c'est la configuration stable la plus simple), sa rencontre avec le *Chasse-neige* ou la tête de l'*Extenseur* détruira celui-ci, ainsi que toute la traînée qui s'embrase à toute vitesse, laissant, après s'être consumée, des débris éparpillés.

Le *Chasse-neige* ou l'*Extenseur* créent un nombre de cellules de plus en plus grand (s'il ne rencontre pas d'obstacles), mais le nombre de cellules vivantes n'augmente que proportionnellement au temps (on dit aussi « en t ») et les cellules n'occupent qu'une petite partie de l'espace infini du plan (une bande étroite). Les questions suivantes viennent donc à l'esprit :

- Peut-on créer une configuration qui se répand petit à petit sur tout le plan avec une densité positive (par exemple, une case occupée sur deux) ?
- Peut-on créer une configuration dont le nombre de cellules augmente plus vite que le temps ?

La réponse positive à ces deux questions est donnée par une extraordinaire machine appelée le *Recouvreur-du-plan*, qui est représentée sur la figure 3 et qui n'est connue que depuis 1993. À mesure des générations, les quatre têtes de pont du *Recouvreur-du-plan* avancent, créant un carré occupé par des bandes alternativement vides et pleines qui sont stables et recouvrent la surface avec une densité de cellules de $1/2$. Comme les têtes de pont avancent à vitesse constante, la zone recouverte a une surface qui croît en fonction du carré du temps (on dit « en t^2 ») et donc, le nombre de cellules vivantes croît lui aussi « en t^2 ». Une configuration dont la croissance est « en t^2 » était déjà connue depuis les années 1970, mais elle faisait intervenir