



POUR LA
SCIENCE

VOUS INVITENT
À L'ENREGISTREMENT
PUBLIC
DE L'ÉMISSION :
L'IMPOSSIBLE

Les impossibles
de
la finance

avec
Christian Walter,
actuaire au
Crédit lyonnais,
enseignant à l'ESSEC.

LE SAMEDI 11 mai 1996
À 15 HEURES
AU PALAIS DE LA DÉCOUVERTE
SALLE DE CINÉMA
AVENUE FRANKLIN D. ROOSEVELT
75008 PARIS

π , e^π et $\Gamma(1/4)$

Démonstration d'une conjecture centenaire.

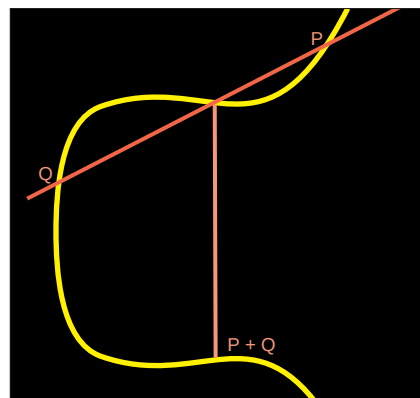
La démonstration du théorème de Fermat, par Andrew Wiles, avait mis en vedette les courbes elliptiques, composées de points dont les coordonnées x et y vérifient des équations de la forme $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$. Aujourd'hui des mathématiciens français et russe obtiennent de nouveaux résultats liés à ces courbes et à l'«invariant modulaire» qui leur est associé.

Qu'est-ce que l'invariant modulaire ? Tout commence par le paramétrage des courbes elliptiques : on sait qu'on peut aussi les définir par un seul paramètre, un nombre complexe z (un nombre que l'on associe à un point d'un plan, au lieu de l'associer à un point d'une droite) et par une fonction p dite de Weierstrass. L'abscisse x de tout point de la courbe s'écrit sous la forme $p(z)$, tandis que l'ordonnée correspondante s'écrit sous la forme $p'(z)$, où p' est la fonction dérivée de p .

Ce paramétrage étant fait, les mathématiciens ont défini une sorte d'addition des points de la courbe, en associant un point noté $P + Q$ à deux points P et Q de la courbe : si le point P a pour coordonnées $(p(z), p'(z))$ et si le point Q a pour coordonnées $(p(t), p'(t))$, alors le point $P + Q$ a pour coordonnées $(p(z+t), p'(z+t))$. Géométriquement, le point $P + Q$ s'obtient en traçant la droite qui passe par les points P et Q ; cette droite coupe la courbe elliptique en un troisième point, dont le symétrique par rapport à l'axe des abscisses est la somme $P + Q$.

Peut-on classer les diverses courbes elliptiques ? Les mathématiciens utilisent à cette fin la fonction p et ses périodes. Une fonction d'une variable réelle, comme le sinus, a une période unique, égale en l'occurrence à 2π ; mais les fonctions p sont des fonctions de la variable complexe, et elles ont deux périodes de base. Le nombre $J(q)$ nommé invariant modulaire est défini à partir de leurs périodes ; il indique les ressemblances entre les courbes elliptiques : deux courbes ayant le même invariant modulaire ont des comportements identiques pour la loi d'addition de leurs points.

En 1969, Kurt Mahler, de l'Université de Canberra, avait conjecturé que l'invariant modulaire $J(q)$ est transcendant quand q est algébrique. Un nombre est transcendant s'il n'est pas algébrique, c'est-à-dire s'il n'est racine d'aucune



On définit une addition de points appartenant aux courbes elliptiques. Pour classer de telles courbes selon la façon dont leurs points s'additionnent, on utilise une fonction nommée invariant modulaire.

équation polynomiale à coefficients entiers. S'il n'est pas besoin d'être grand mathématicien pour vérifier que $\sqrt{2}$ est algébrique (puisque'il est racine de l'équation $x^2 = 2$), la démonstration de la transcendance d'un nombre est souvent très difficile : il a fallu attendre 1882 pour savoir que le nombre π est transcendant. La conjecture de Mahler a intéressé de nombreux théoriciens des nombres : en démontrant cette conjecture, on obtient la transcendance d'une famille infinie de nombres.

Avec Katia Barré-Sirieix, Guy Diaz et Georges Philibert, nous avons démontré la conjecture de K. Mahler en février 1995. Notre résultat a fait quelque bruit dans la communauté mathématique, parce qu'il résolvait un problème ancien, mais il a surtout ouvert une voie nouvelle pour l'étude de questions difficiles, et il est à l'origine de résultats spectaculaires : Yuri Nesterenko, de l'Université de Moscou, talonné par Patrice Philippon, de l'Université Paris VI, ont démontré l'indépendance algébrique des nombres π , e^π et $\Gamma(1/4)$, où la fonction Γ d'Euler prolonge la fonction factorielle aux nombres fractionnaires. Cela signifie que, si P est un polynôme de trois variables à coefficients entiers non tous nuls, le nombre $P(\pi, e^\pi, \Gamma(1/4))$ n'est pas nul. L'indépendance algébrique de π et e^π qui découle du travail de Y. Nesterenko et P. Philippon est un résultat dont les mathématiciens rêvaient depuis près d'une centaine d'années !

François GRAMAIN
Université de Saint-Étienne

La végétation par satellite

On étudie les échanges de carbone de la biosphère continentale en suivant les variations de couverture végétale du Globe.

Depuis 1750 environ, l'humanité rejette une quantité croissante de dioxyde de carbone (CO_2) dans l'atmosphère. Une partie du gaz libéré est fixée par les océans ou par les plantes et les sols, mais le reste s'accumule dans l'atmosphère, augmentant l'effet de serre et contribuant au réchauffement de la planète. Cette accumulation de dioxyde de carbone dans l'atmosphère sera-t-elle ralentie ou amplifiée par la végétation dans les prochaines décennies ? Pour étudier cette question, notre équipe s'est associée à celle de Gérard Dedieu, du Centre d'études spatiales de la biosphère, à Toulouse : ensemble, nous avons utilisé des capteurs embarqués à bord de satellites pour déterminer la production de matière organique par l'ensemble de la végétation mondiale, puis les échanges de dioxyde de carbone entre la végétation et l'atmosphère.

Les plantes fabriquent de la matière organique par photosynthèse en fixant le dioxyde de carbone de l'atmosphère, grâce à l'énergie solaire. Une partie de la biomasse formée est consommée par les herbivores, qui nourrissent eux-

mêmes des carnivores. Puis, lorsque les plantes et les animaux meurent, leur matière organique est décomposée en éléments minéraux assimilables par les plantes. Pendant la saison de croissance, la photosynthèse l'emporte sur la respiration des végétaux et des animaux, et les écosystèmes accumulent du carbone, qu'ils extraient de l'atmosphère. C'est l'inverse pendant la mauvaise saison.

Sur les continents, la photosynthèse n'a lieu que si des feuilles vertes absorbent le rayonnement solaire. Nous avons eu recours aux observations par satellite pour distinguer les feuilles vertes du sol nu : les feuilles, en effet, réfléchissent très peu le rouge (absorbé par la chlorophylle) et beaucoup le proche infrarouge (à cause des interfaces air-eau dans les feuilles) ; en revanche, les sols et les roches réfléchissent à peine plus le proche infrarouge que le rouge. On a donc construit des indices de végétation permettant, à partir de mesures par satellites, de calculer la fraction de sol occupée par de la végétation, puis le rayonnement solaire absorbé par cette dernière.

Le problème est un peu compliqué par l'atmosphère : d'une part, on doit

éliminer les zones couvertes de nuages, ce qui est un phénomène fréquent en zone équatoriale ; d'autre part, le contenu de l'air en vapeur d'eau et en aérosols modifie le spectre du rayonnement reçu par le satellite et impose des corrections atmosphériques.

Malgré ces difficultés, nous avons établi des cartes mensuelles du rayonnement solaire absorbé par la végétation, avec une résolution spatiale de un degré de latitude et de longitude. Nous avons ensuite calculé la photosynthèse qui, en première approximation, est égale au produit du rayonnement absorbé par une efficacité de conversion biologique. Cette efficacité a été prise identique pour tous les types de végétation sur la base de données expérimentales. Nous avons ensuite calculé la respiration des plantes, qui dépend de la température et de la quantité de biomasse qui respire, et nous avons finalement obtenu la production de biomasse sur l'ensemble des continents (voir la figure).

ÉVOLUTION DE LA PRODUCTION

Revenons à la question initiale : comment évolue cette production végétale ? Chez la plupart des plantes, une augmentation de la concentration atmosphérique en dioxyde de carbone accroît la photosynthèse et la production de biomasse. On s'attend donc à ce que la végétation modère l'accumulation de dioxyde de carbone dans l'atmosphère en stockant un excédent de carbone dans la biomasse et dans la matière organique des sols ; toutefois l'effet observé fluctue beaucoup selon la température annuelle moyenne, la pluviométrie, etc. Notre suivi, année par année, du couvert végétal est en cours de corrélation avec les mesures globales de la concentration atmosphérique

en dioxyde de carbone. Il restera à préciser si l'accroissement de production végétale est durable, ce qui est étudié dans de nombreux laboratoires dont le nôtre et celui de L. Kergoat, au CESBIO de Toulouse, qui simulent l'état de la couverture végétale à partir des seules données du climat et de la composition atmosphérique.

Bernard SAUGIER

et Anne RUMY
Laboratoire
d'écophysiologie
végétale, (URA
1492) Orsay

