

Jeux avec des cartes bifaces

JEAN-PAUL DELAHAYE

Jeux, patiences et magie mathématique avec les cartes Janus.

Pourquoi perdre une surface utile et ne pas imprimer les cartes à jouer des deux côtés ? Pourquoi ne pas utiliser ces jeux à double face ? Aucune raison à cela sinon la tradition, dont on sait qu'elle peut être bousculée. Nous allons explorer les possibilités du jeu *Janus*, inventé en 1988 par Roland Yéléhada, qui permet des combinaisons amusantes et pose plusieurs énigmes mathématiques.

LA STRUCTURE DU JEU

Le jeu *Janus* comporte 32 cartes de deux types : 16 cartes *parallèles* et 16 cartes *complémentaires*. Les 16 cartes *parallèles* sont (on indique à chaque fois les deux faces, séparées par le symbole /) :

7♥/7♠, 8♥/8♠, 9♥/9♠, 10♥/10♠
 V♥/V♠, D♥/D♠, R♥/R♠, A♥/A♠
 7♦/7♣, 8♦/8♣, 9♦/9♣, 10♦/10♣
 V♦/V♣, D♦/D♣, R♦/R♣, A♦/A♣

Le cœur et le pique qui se ressemblent – un pique n'est jamais qu'un cœur noir renversé avec une queue – sont associés et ce sont des couleurs parallèles. De même, le carreau et le trèfle sont aussi des couleurs parallèles.

Les 16 cartes complémentaires sont :

7♥/A♣, 8♥/R♣, 9♥/D♣, 10♥/V♣
 V♥/10♣, D♥/9♣, R♥/8♣, A♥/7♣
 7♦/A♠, 8♦/R♠, 9♦/D♠, 10♦/V♠
 V♦/10♠, D♦/9♠, R♦/8♠, A♦/7♠

Derrière une face donnée, se trouve la face de hauteur complémentaire (le complément du 7 est l'as, celui du 8 est le roi, du 9 la dame, du 10 le valet) et de couleur complémentaire (le complément du cœur est le trèfle, et le complément du carreau est le pique).

Observons la structure de ce jeu, ce qui sera utile pour apprécier la suite :

- il y a 32 cartes, et donc 64 faces ;
- il y a deux 7♥, deux 8♥, etc. Chaque carte d'un jeu «habituel» de 32 cartes apparaît deux fois ;
- chaque carte a une face rouge et une face noire ;

- une carte sur deux comporte une face cœur (de même pour pique, carreau et trèfle) ;

- connaissant une seule face d'une carte, on ne peut pas savoir ce qu'il y a derrière, mais il n'y a que deux possibilités, selon que la carte est parallèle ou complémentaire. Si l'on voit un 10♥, l'autre face est soit un 10♠ (même hauteur et couleur parallèle) si la carte est parallèle, soit un V♠ (hauteur complémentaire et couleur complémentaire) si la carte est complémentaire.

Cette structure régulière permet de nombreuses combinaisons intéressantes et amène à faire des raisonnements de parités et de probabilités parfois simples et parfois... moins simples.

Pour disposer d'un jeu *Janus*, vous pouvez le fabriquer en quelques minutes à partir de deux jeux de 32 cartes et d'un peu colle ou de papier adhésif.

LE JEU DES MARIAGES PARFAITS

Commençons par un jeu auquel on peut jouer avec des enfants (à partir de 6 ou 7 ans) et qui renouvelle le fameux *jeu des mariages* (ou *poux chinois*, ou *memory*) et demande des capacités de raisonnement plutôt que de mémorisation pour gagner.

Après avoir choisi qui commence (chacun prend une carte au hasard, et la plus forte désigne qui a la main), on mélange le jeu et l'on étale les 32 cartes sur la table. Parmi les 32 faces visibles (32 autres sont cachées), certaines associations parfaites sont possibles : par exemple, deux valets de cœur peuvent être visibles. Tant qu'il reste de telles paires, les joueurs prennent, chacun à son tour, une telle *paire parfaite*. Ils ne retournent pas les cartes qu'ils enlèvent, et donc les faces cachées restent inconnues (cela en fait est sans importance, car, quand une paire parfaite est enlevée, elle comporte une carte parallèle et une carte complémentaire, et donc on sait ce qu'on retire).

Cette première phase achevée, chaque joueur retourne une carte de son choix à tour de rôle, carte qu'il laisse retournée même s'il n'obtient rien (dans le jeu classique, on retourne deux cartes). Si la carte retournée fait apparaître une paire parfaite, il la prend et c'est à l'autre joueur de jouer, sinon il passe son tour. Dans cette phase, il est intéressant de raisonner, et c'est l'intérêt du jeu : si par exemple le 7♥, le 7♠ et l'A♣ sont visibles vous pouvez retourner tranquillement le 7♥ et être certain de gagner une paire (car derrière un 7♥, il y a soit le 7♠, soit l'A♣). D'autres raisonnements plus subtils sont possibles si l'on tient compte des cartes enlevées dans la première phase du jeu, lesquelles doivent rester visibles. Le jeu se termine lorsque plus aucune carte ne reste sur la table. Chacun compte alors ses paires, et celui qui en a le plus a gagné.

Vous vous interrogez déjà : est-on toujours certain de ne laisser aucune carte sur la table ? Ne se peut-il pas en effet que deux cartes, ou plus, restent sans qu'aucune association parfaite nouvelle ne puisse se faire ? La réponse est que cela ne se produit jamais, et ce sera la première énigme.

Énigme 1

Pourquoi une partie de mariages parfaits ne laisse-t-elle jamais de cartes sur la table ?

Solution 1

Pour établir qu'aucune carte ne reste jamais bloquée sur la table quand on joue aux mariages parfaits, analysons la structure des cartes *Janus* (ce qui nous aidera aussi à mieux jouer).

Distinguons deux catégories de faces : la catégorie α , incluant toutes les faces fortes (valet, dame, roi et as) de cœur ou de pique, et toutes les faces faibles (7, 8, 9 et 10) de carreau ou de trèfle ; la catégorie β , qui comporte toutes les faces fortes de carreau ou de trèfle, et toutes les faces faibles de cœur ou de pique.

Par construction du jeu *Janus*, derrière une face de catégorie α , il y a une face de catégorie β , et derrière une face de catégorie β , il y a une face de catégorie α , ce qui fait que l'on peut parler de cartes (et non plus de faces) de catégorie α , et de cartes de catégorie β .

Les hauteurs des faces sont associées par deux : 7 avec as, 8 avec roi, 9 avec dame et 10 avec valet. Distinguons donc quatre niveaux, le niveau 7/A, le niveau 8/R, le niveau 9/D, le niveau 10/V. Chaque carte appartient à un niveau et un seul. Chaque niveau comporte huit cartes.

Nous pouvons maintenant prouver que le jeu des mariages parfaits ne se bloque jamais. Lorsqu'on fait un mariage parfait, on associe deux cartes de même

catégorie (puisqu'elles ont une face identique) et de même niveau (pour la même raison). Il n'y a que quatre cartes appartenant à une catégorie fixée et à un niveau fixé (appelons l'ensemble de ces cartes une famille). Ainsi les quatre cartes du niveau 8/R de la catégorie β , la famille $\{8/R, b\}$, sont :

$8\heartsuit/8\spadesuit, 8\heartsuit/R\clubsuit, R\spadesuit/8\spadesuit, R\spadesuit/R\clubsuit$.

Aucune carte autre que ces quatre ne peut faire un mariage parfait avec l'une de ces quatre cartes : les mariages parfaits se font en famille ! Donc, lorsqu'un mariage a été fait entre deux de ces quatre cartes :

- ou bien les deux dernières cartes peuvent se marier ;

- ou bien les deux dernières cartes ne peuvent pas se marier, et alors aucune des deux cartes qui restent ne pourra se marier avec aucune autre du jeu (blocage).

On vérifie, par énumération des cas possibles, que, quel que soit le mariage fait de deux cartes parmi les quatre de la famille, les deux cartes qui restent peuvent faire un mariage parfait. Donc le blocage ne proviendra jamais de cette famille de quatre cartes. Les autres cartes se regroupent de la même façon, et donc aucun blocage n'est possible.

En poussant un peu plus loin l'analyse, on découvre une façon optimale de jouer : il faut traiter soigneusement le cas de quatre cartes d'une même famille. Si chacun des deux joueurs utilise cette stratégie optimale, alors aucun ne fera moins de quatre mariages parfaits ; la probabilité d'une partie nulle sera de $(3/4)^8$ égal à 6561/65536, soit 10,01 pour cent ; la probabilité de gagner pour celui qui commence sera de 255/512, soit 49,80 pour cent ; la probabilité de gagner pour celui qui joue en second sera de 26335/65536 égal à 40,18 pour cent. Ce jeu, si l'on joue parfaitement, donne donc un avantage de 10 pour cent à celui qui commence. Ce déséquilibre peut être annulé à 0,2 pour cent près, en convenant que les parties nulles sont gagnées par le joueur n'ayant pas commencé.

DEUX RÉUSSITES

Nous allons présenter maintenant deux réussites utilisant le jeu *Janus*, dont l'analyse mathématique complète est possible, ce qui est assez rare.

L'opération de base de la première réussite est le repliage : elle consiste à prendre deux paquets de cartes sur la

table et à retenir celui des deux qu'on a choisi sur l'autre, comme s'il s'agissait d'un livre : les deux faces qui étaient au-dessus des paquets sont mises en contact. Le paquet obtenu et reposé sur la table montre alors ce qui était la face arrière de la dernière carte du paquet replié.

Pour la première réussite, vous étalez les 32 cartes, puis vous repliez les cartes les unes sur les autres (comme indiqué ci-dessous) en vous imposant de ne replier que deux paquets dont la face visible est de même couleur (ne repliez un cœur que sur un cœur, un pique que sur un pique, etc.). Si, à la fin, vous réussissez à n'avoir plus qu'un paquet, vous avez gagné.

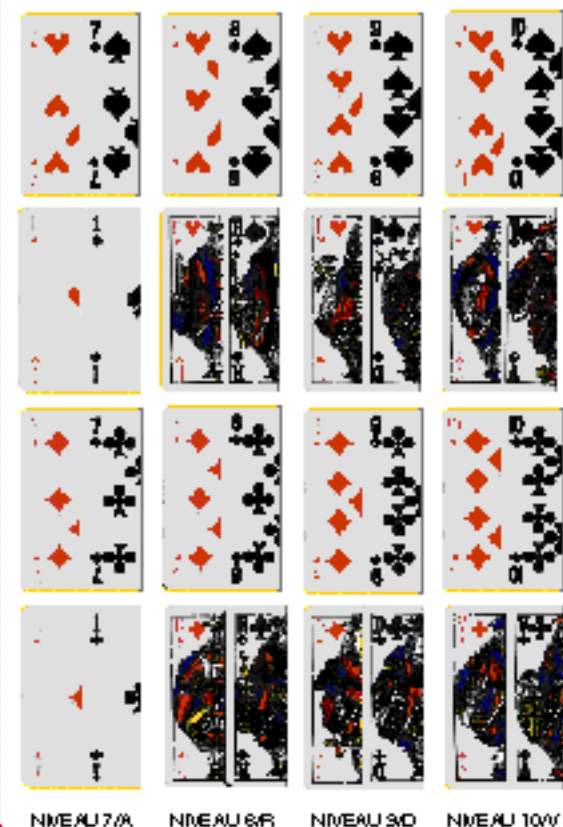
Énigme 2

Comment jouer parfaitement, et quelle est alors la probabilité de réussir ?

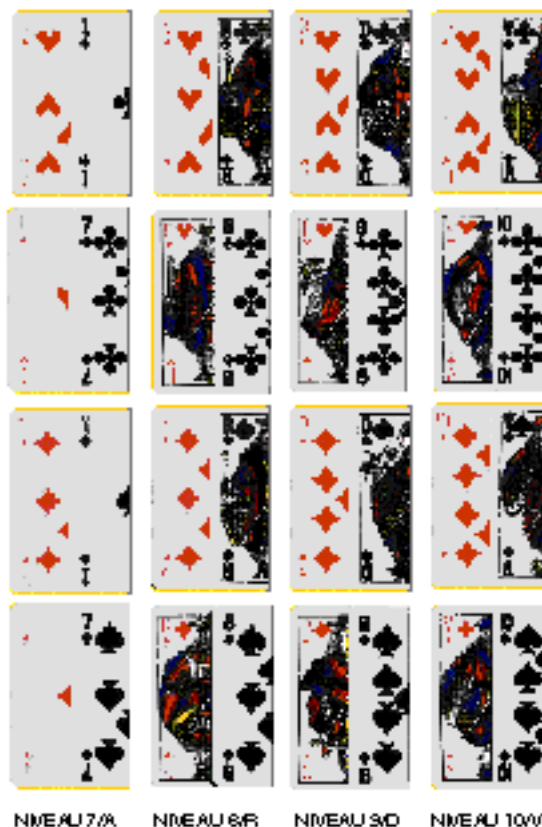
Solution 2

La probabilité de gagner est de 100 pour cent si l'on s'y prend bien, mais nous donnerons une méthode pour gagner avec 96,9 pour cent de chance (la stratégie que je connais pour gagner dans tous les cas est trop longue pour figurer ici). Existe-t-il une démonstration plus courte pour établir les 100 pour cent ? Lecteurs passionnés, à vos plumes !

LES 16 CARTES PARALLÈLES



LES 16 CARTES COMPLÉMENTAIRES



1. Les cartes *Janus* possèdent deux faces, représentées ici en demi-superposition. Les cartes parallèles possèdent deux faces de la même hauteur, et de couleurs opposées (soit cœur-pique, soit

carreau-trèfle). Les cartes complémentaires possèdent deux faces de hauteurs complémentaires et de couleurs opposées (cette fois, soit cœur-trèfle, soit carreau-pique).