

catégorie (puisqu'elles ont une face identique) et de même niveau (pour la même raison). Il n'y a que quatre cartes appartenant à une catégorie fixée et à un niveau fixé (appelons l'ensemble de ces cartes une famille). Ainsi les quatre cartes du niveau 8/R de la catégorie β , la famille $\{8/R, b\}$, sont :

$8\heartsuit/8\spadesuit, 8\heartsuit/R\clubsuit, R\spadesuit/8\spadesuit, R\spadesuit/R\clubsuit$.

Aucune carte autre que ces quatre ne peut faire un mariage parfait avec l'une de ces quatre cartes : les mariages parfaits se font en famille ! Donc, lorsqu'un mariage a été fait entre deux de ces quatre cartes :

- ou bien les deux dernières cartes peuvent se marier ;
- ou bien les deux dernières cartes ne peuvent pas se marier, et alors aucune des deux cartes qui restent ne pourra se marier avec aucune autre du jeu (blocage).

On vérifie, par énumération des cas possibles, que, quel que soit le mariage fait de deux cartes parmi les quatre de la famille, les deux cartes qui restent peuvent faire un mariage parfait. Donc le blocage ne proviendra jamais de cette famille de quatre cartes. Les autres cartes se regroupent de la même façon, et donc aucun blocage n'est possible.

En poussant un peu plus loin l'analyse, on découvre une façon optimale de jouer : il faut traiter soigneusement le cas de quatre cartes d'une même famille. Si chacun des deux joueurs utilise cette stratégie optimale, alors aucun ne fera moins de quatre mariages parfaits ; la probabilité d'une partie nulle sera de $(3/4)^8$ égal à 6561/65536, soit 10,01 pour cent ; la probabilité de gagner pour celui qui commence sera de 255/512, soit 49,80 pour cent ; la probabilité de gagner pour celui qui joue en second sera de 26335/65536 égal à 40,18 pour cent. Ce jeu, si l'on joue parfaitement, donne donc un avantage de 10 pour cent à celui qui commence. Ce déséquilibre peut être annulé à 0,2 pour cent près, en convenant que les parties nulles sont gagnées par le joueur n'ayant pas commencé.

DEUX RÉUSSITES

Nous allons présenter maintenant deux réussites utilisant le jeu *Janus*, dont l'analyse mathématique complète est possible, ce qui est assez rare.

L'opération de base de la première réussite est le repliage : elle consiste à prendre deux paquets de cartes sur la

table et à retenir celui des deux qu'on a choisi sur l'autre, comme s'il s'agissait d'un livre : les deux faces qui étaient au-dessus des paquets sont mises en contact. Le paquet obtenu et reposé sur la table montre alors ce qui était la face arrière de la dernière carte du paquet replié.

Pour la première réussite, vous étalez les 32 cartes, puis vous repliez les cartes les unes sur les autres (comme indiqué ci-dessous) en vous imposant de ne replier que deux paquets dont la face visible est de même couleur (ne repliez un cœur que sur un cœur, un pique que sur un pique, etc.). Si, à la fin, vous réussissez à n'avoir plus qu'un paquet, vous avez gagné.

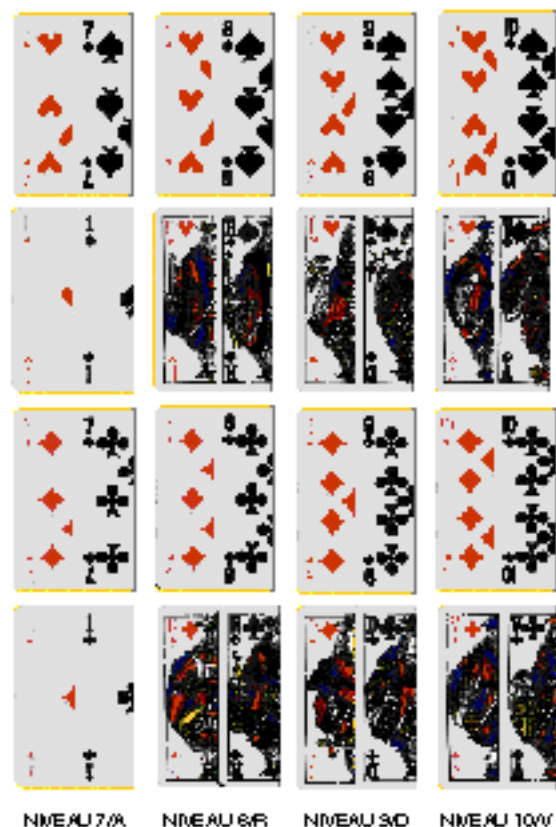
Énigme 2

Comment jouer parfaitement, et quelle est alors la probabilité de réussir ?

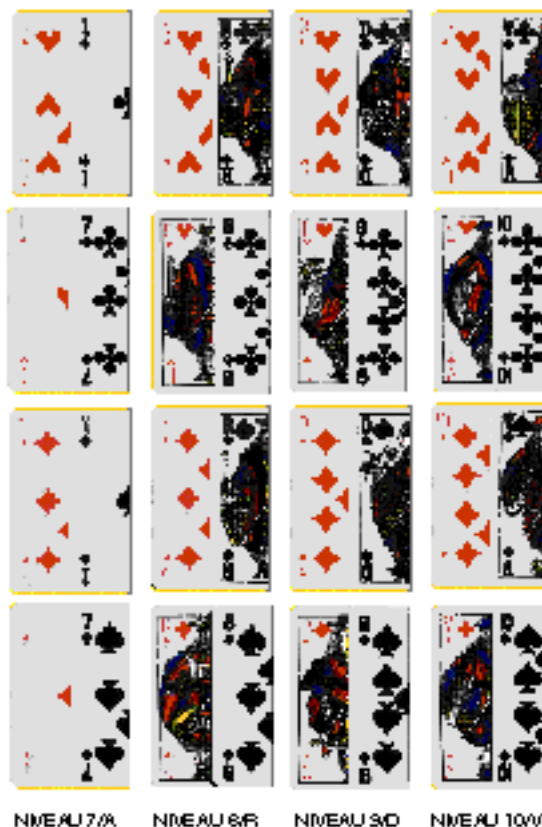
Solution 2

La probabilité de gagner est de 100 pour cent si l'on s'y prend bien, mais nous donnerons une méthode pour gagner avec 96,9 pour cent de chance (la stratégie que je connais pour gagner dans tous les cas est trop longue pour figurer ici). Existe-t-il une démonstration plus courte pour établir les 100 pour cent ? Lecteurs passionnés, à vos plumes !

LES 16 CARTES PARALLÈLES



LES 16 CARTES COMPLÉMENTAIRES



1. Les cartes *Janus* possèdent deux faces, représentées ici en demi-superposition. Les cartes parallèles possèdent deux faces de la même hauteur, et de couleurs opposées (soit cœur-pique, soit

carreau-trèfle). Les cartes complémentaires possèdent deux faces de hauteurs complémentaires et de couleurs opposées (cette fois, soit cœur-trèfle, soit carreau-pique).

Examinons d'abord les huit cartes parallèles portant du cœur et du pique : 7♥/7♠, 8♥/8♠, 9♥/9♠, 10♥/10♠, V♥/V♠, D♥/D♠, R♥/R♠, A♥/A♠. Si ces huit cartes sont disposées au hasard et qu'elles ne sont pas toutes du même côté (pas toutes avec le cœur au-dessus, pas toutes avec le pique au-dessus), on peut les replier en deux paquets : l'un ♥/♠ (cœur dessus, pique dessous) ; l'autre ♠/♥. Je pourrais décrire la méthode établissant ce fait, mais quelques essais vous la feront trouver.

De la même façon, si les huit cartes parallèles portant du carreau et du trèfle ne sont pas toutes du même côté, vous pouvez les ramener par pliage à deux paquets : l'un ♦/♣ et l'autre ♣/♦. De la même façon, les cartes complémentaires

conduisent à quatre paquets : ♥/♣, ♣/♥, ♦/♠, ♠/♦.

Reste à voir que les huit paquets ainsi obtenus peuvent se regrouper en un seul. Pour cela, numérotions ces paquets de 1 à 8 dans l'ordre suivant : ♥/♠, ♠/♥, ♦/♣, ♣/♦, ♥/♣, ♠/♥, ♦/♠, ♠/♦. La séquence suivante d'opérations donne le résultat : plier le 1 sur le 5, le 8 sur le 5, le 3 sur le 5, le 4 sur le 5, le 5 sur le 7, le 7 sur le 6, le 6 sur le 2.

Cela établit donc que, si aucun des groupes de 8 cartes n'est malchanceux (toutes les cartes montrant la même couleur), alors on peut réussir. La probabilité pour qu'un groupe de 8 cartes soit malchanceux est $(1/2)^7$, soit $1/128$ car il faut que la deuxième carte soit dans le même sens que la première, que la troi-

sième aussi soit du même sens, etc. Pour qu'aucun des groupes ne soit malchanceux, la probabilité est donc de $(127/128)^4$, ou 96,91 pour cent. Pour passer de 96,91 pour cent à 100 pour cent, il faut traiter les cas où un groupe est malchanceux, puis deux, puis trois, puis quatre (c'est un peu pénible, mais on y arrive).

LA RÉUSSITE DU DOUBLE RETOURNEMENT

Présentons la seconde réussite avec le jeu *Janus* dont l'analyse mathématique est possible. Vous disposez toutes les cartes sur la table. En utilisant autant de fois que vous le jugerez bon l'opération de *double retournement* (deux cartes sont retournées simultanément), vous devez réussir à n'avoir plus aucune paire parfaite visible, autrement dit vous devez avoir face au-dessus un jeu normal de 32 cartes (vous en avez alors un au-dessous aussi).

Énigme 3

Comment jouer parfaitement, et quelle est la probabilité de réussir si on joue parfaitement ?

Solution 3

La probabilité de réussir est cette fois de 50 pour cent pour qui joue bien.

Montrons d'abord que, s'il y a un nombre impair de cartes ayant le noir au-dessus, vous ne réussirez jamais. En effet, lors d'une opération de double retournement, le nombre de cartes ayant le noir au-dessus varie soit de 0 (si vous retournez une carte noire et une carte rouge), soit de +2 (si vous retournez deux cartes rouges), soit de -2 (si vous retournez deux cartes noires). La parité du nombre de cartes ayant le noir au-dessus reste donc toujours la même. Donc, en partant d'un nombre impair de cartes noires, vous n'arrivez jamais à avoir un nombre pair de cartes noires, ce qui est nécessaire pour réussir.

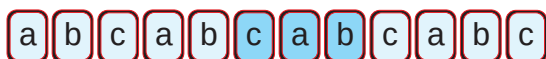
Il faut donc que la configuration de départ comporte un nombre pair de cartes noires ; cette condition nécessaire, de probabilité $1/2$, est aussi une condition suffisante pour réussir. Voici pourquoi.

On suppose que le nombre de cartes ayant le noir au-dessus est pair.

Regroupez les cartes par *famille* (voir l'explication de l'énigme 1) sans les retourner. Arrangez-vous maintenant pour que la condition de parité soit satisfaite dans chaque famille. C'est possible, car si elle n'est pas satisfaite dans une famille, il y a une autre famille où elle ne l'est pas, et, en retournant une carte de chaque famille, vous la rendez alors vraie dans les deux familles. De proche en proche, vous pouvez donc la rendre vraie à l'intérieur de chaque famille. Dans chaque famille (vérifiant maintenant qu'un nombre

LE PRINCIPE DE GILBREATH

PRENEZ UNE SUITE RÉPÉTÉE DE N CARTES



COUPEZ LA SUITE EN DEUX PAQUETS



INVERSEZ LE SECOND PAQUET



FRACTIONNEZ CHAQUE PAQUET EN MORCEAUX PLUS PETITS



INTERCALEZ LES MORCEAUX DU PREMIER PAQUET AVEC CEUX DU SECOND



REGROUPEZ LES CARTES PAR PAQUETS DE N



CHAQUE PAQUET CONTIENT UNE CARTE DE CHAQUE SORTE

DÉMONSTRATION DU PRINCIPE DE GILBREATH

Le dernier paquet de n cartes dans les paquets finaux est obtenu en prenant une carte dans le paquet initial (la carte a sur fond bleu), puis successivement, soit une carte devant cette carte, soit une carte derrière cette carte, jusqu'à avoir n cartes (sans nécessairement alterner régulièrement les choix).

Le dernier paquet est donc constitué de n cartes consécutives de la suite initiale et comporte donc une carte de chaque sorte.

Le principe est donc démontré pour le dernier paquet de la suite finale.

Si on enlève les n cartes sur fond bleu du début jusqu'à la fin de la description des manipulations, les symboles restants décrivent la même manipulation avec une liste initiale plus courte de n cartes. Donc, du raisonnement précédent, on tire que l'avant-dernier paquet des paquets finaux contient aussi une carte de chaque sorte. Etc.