

Le but du joueur I est que le nombre obtenu en fin de partie (au bout d'un temps infini!) soit un élément de l'ensemble A , et le but du joueur II est que ce nombre ne soit pas un élément de A . Existe-t-il une façon de jouer, pour I ou pour II, qui assure le gain?

Solution : Le joueur II a une stratégie gagnante. Il joue '1' au début, puis '1' une fois sur deux, et '0' une fois sur deux. Voyons pourquoi il gagne avec cette stratégie. Une petite difficulté initiale ne nous arrêtera pas : il existe deux développements binaires de $1/2$: $0,1000\dots$ et $0,0111\dots$ (le second développement résulte du fait que la somme de la série $1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \dots$ est égale à $1/2$). Similairement, les développements binaires de $1/4$ sont $0,0100\dots$ et $0,001111\dots$. Dans aucun de ces développements, on ne trouve un '1' suivi plus loin d'un '0', puis plus loin d'un '1' ; donc, dès son troisième coup, le joueur II est certain que le développement obtenu à l'infini sera celui d'un nombre n'appartenant pas à A .

Citons quelques problèmes de jeu infini avec divers ensembles A .

- $A = [1/8, 7/8]$, l'intervalle comprenant tous les nombres réels entre $1/8$ et $7/8$.

Solution : Le joueur I possède une stratégie gagnante qui est : jouer '1' puis '0', puis n'importe quoi, car tout nombre de la forme $0,1?0??? \dots$ est compris entre $1/2$ et $1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8$.

- $A = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, un ensemble fini quelconque fixé de nombres réels.

Solution : Le joueur II a une stratégie gagnante. Elle consiste à se fixer un chiffre de r_1 de rang impair, et à jouer le complémentaire de ce chiffre lorsqu'il y arrive, ce qui «évite» au résultat final d'être r_1 (si r_1 possède deux développements, le joueur II «évite» d'abord le premier, puis le second). Le joueur II évite de même le nombre r_2 , puis le nombre r_3 , etc. Puisqu'il dispose d'un nombre infini de coups, le joueur II évite ainsi tous les éléments de A les uns après les autres, et il est certain de gagner. Remarquons que cette «méthode d'évitement» s'adapte à tout ensemble infini dénombrable A (un ensemble est infini dénombrable si tous ses éléments peuvent être numérotés par les nombres entiers).

- $A =$ les nombres dont le développement binaire ne comporte jamais trois '0' ou trois '1' consécutifs (jeu des pharaons de l'encadré 1).

Solution : Le joueur I gagne en jouant n'importe quoi au premier

coup, et ensuite toujours l'inverse de ce que vient de jouer le joueur II (ce qui assure que jamais trois chiffres consécutifs ne sont identiques, et donc que le nombre obtenu à l'infini est bien dans A).

Nous pourrions multiplier les exemples, et nous découvririons que, pour tout ensemble A pas trop compliqué, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le jeu est *déterminé* pour l'ensemble A , ou encore que l'ensemble A est *déterminé*.

Quelqu'un est-il sûr de gagner?

Les jeux infinis et leurs stratégies gagnantes furent examinés pour la première fois par les mathématiciens polonais S. Mazur et S. Banach dans les années 1930. Ces développements intéressent aujourd'hui les informaticiens, car, à partir de telles études, on modélise les interactions entre un système informatique et ses utilisateurs. Les informaticiens veulent s'assurer que le système informatique ne tombe jamais en panne et que le système répond aux demandes des utilisateurs en ce qui concerne l'accès aux ressources dont il a la charge (imprimante, modem, etc.). Le système informatique joue donc une sorte de partie infinie avec les utilisateurs qui, par maladresse ou malveillance, pourraient interrompre son fonctionnement. Par ailleurs, les utilisateurs ne doivent pas attendre indéfiniment les accès aux ressources qu'ils sollicitent.

Une stratégie gagnante pour le système assure ainsi qu'il n'y aura jamais de panne et que les utilisateurs seront correctement servis, alors qu'une stratégie gagnante pour les utilisateurs est la marque d'un point faible dans la sécurité. Les problèmes de jeux infinis sont concrets, et pourtant ils nous conduiront aux confins de la théorie des ensembles, en un lieu où les objets considérés sont si gros, si «infinis», que leur existence est indécidable!

Le contenu d'un ensemble A étant défini, existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs? Autrement dit, tout ensemble A est-il déterminé? Si la réponse est non, quels sont les ensembles déterminés?

La profondeur et la difficulté de ces questions, pourtant de formulation simple, sont inattendues ; on ne sait pas y répondre complètement aujourd'hui.

2. ENSEMBLE DÉNOMBRABLE, HYPOTHÈSE DU CONTINU

Un ensemble infini est dénombrable s'il peut être mis en correspondance, terme à terme, avec l'ensemble des entiers.

Ainsi l'ensemble N de tous les mots qu'on peut écrire avec les deux lettres "a" et "b" est dénombrable :

a	b	aa	ab	ba	bb	aaa	aab	aba	abb	abb	baa	bab	bbb	aaaa
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

L'ensemble des nombres réels, noté R , en revanche, n'est pas dénombrable. On le démontre avec le raisonnement diagonal de Cantor :

	1.....2.....i.....j.....
$r_0 = 0,$	
$r_1 = 0,$	
$r_i = 0,$	
$r_j = 0,$	
$r = 0,$	

Soit une liste de nombres réels $r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots$ supposée complète. On définit un nombre réel r qui possède comme décimale numéro i un chiffre différent de la décimale numéro i de r_i . Le nombre réel ainsi construit n'est égal à aucun nombre de la liste $r_0, r_1, r_2, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots$. La liste n'est donc pas complète, et donc l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On dit qu'un ensemble qui peut être mis en correspondance terme à terme avec l'ensemble des nombres réels a la puissance du continu.

L'hypothèse du continu est l'affirmation que tout sous-ensemble infini de R est dénombrable ou a la puissance du continu.

d'hui, car elles sont liées aux aspects les plus mystérieux de la théorie axiomatique des ensembles et, en particulier, aux axiomes de grands cardinaux et à l'hypothèse du continu.

Tout ensemble est-il déterminé?

Les premiers résultats, dus à D. Gale et F. Stewart, datent de 1953 : ces deux mathématiciens démontrèrent que tout ensemble ouvert (voir l'encadré 3) est déterminé. Les deux adversaires jouent comme précédemment, en ajoutant, chacun à leur tour soit 0, soit 1. Avec certains ouverts, comme l'intervalle A égal à $]0, 2/3[$ (tous les nombres entre 0 et $2/3$, à l'exception de 0 et $2/3$), c'est le joueur I qui dispose d'une stratégie gagnante ; pour d'autres, comme A égal à $]1/4, 3/4[$, c'est le joueur II qui est assuré de gagner.

D. Gale et F. Stewart démontrèrent aussi que nous ne devons pas croire que tout ensemble est déterminé : cela conduirait à une contradiction avec un axiome de base de la théorie des ensembles, l'axiome du choix. Cet axiome affirme une évidence : si vous avez une famille d'ensembles non vides, vous pouvez construire un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chacun des ensembles de la famille. L'axiome du choix a donné lieu à de nombreux débats au début du siècle, mais les théoriciens des ensembles l'acceptent aujourd'hui.

On envisagea un moment d'adopter l'axiome de détermination complète qui affirme que «tout ensemble est déterminé» et de renoncer à l'axiome du choix. Par analogie avec le cas fini, il est naturel de soutenir que tout ensemble est déterminé, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie gagnante pour tout ensemble A . En 1962, J. Mycielski et H. Steinhaus argumentaient de la façon suivante : «Supposons que les deux joueurs soient infiniment intelligents et qu'ils connaissent parfaitement bien l'ensemble A , alors le résultat du jeu ne peut pas dépendre du hasard, et donc l'un des deux doit disposer d'une stratégie gagnante.»

Entre deux énoncés naturels qui se contredisent, ici l'axiome de détermination complète et l'axiome du choix, nous pouvons retenir celui qui nous «arrange» le mieux, et donc l'axiome de détermination complète si nous y trouvons un intérêt.

Cette défense de l'axiome de détermination complète est aujourd'hui jugée peu convaincante, et les mathématiciens préfèrent garder l'axiome du choix, mieux ancré dans l'intuition.

Intéressons-nous aux sous-ensembles des nombres réels R et essayons d'identifier ceux qu'il est raisonnable de considérer déterminés. En simplifiant, les sous-ensembles de R sont classés en quatre catégories, les ouverts, les boréliens, les projectifs et les ensembles qui ne sont pas projectifs (voir l'encadré 3).

La généralisation de la preuve que «tous les ouverts sont déterminés» à «tous les boréliens sont déterminés» nécessita 20 ans de travail et aboutit en 1975 grâce à Donald Martin. L'étape suivante qui aurait été de montrer que tout ensemble projectif est déterminé, affirmation qui s'appelle la *détermination projective*, ne fut jamais franchie. La démonstration était impossible, comme on le comprit en montrant que les axiomes habituels de la théorie des ensembles, s'ils sont sans contradiction, ne démontreront jamais la détermination projective.

Ainsi, pour certains ensembles, on ne peut savoir si le jeu associé possède une stratégie gagnante. Ce résultat est étonnant, mais l'axiome de détermination projective est tellement tentant qu'on ne souhaitait pas l'abandonner, d'autant qu'il permet une théorie belle et efficace des sous-ensembles de R .

Avec l'axiome de détermination complète, certaines démonstrations sont plus directes et plus naturelles que d'autres démonstrations connues. Citons Donald Martin : «Bien que la détermination projective ne puisse être prouvée à partir des axiomes habituels de la théorie des ensembles, elle conduit à une théorie élégante et essentiellement complète des ensembles projectifs, et donc il n'est pas déraisonnable qu'elle soit vraie. Je considère que l'axiome de détermination projective a un statut analogue à une hypothèse en physique : les conséquences de la détermination projective sont si harmonieuses et riches qu'elles constituent une preuve quasi empirique de la détermination projective.» Il devenait donc naturel d'ajouter l'axiome de détermination projective aux autres axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, notée ZFC.

Remarquons l'étrangeté de la situation : les mathématiciens ne réussissant pas à prouver une propriété – ils savent même qu'elle n'est pas prouvable avec les outils habituels –, mais, constatant qu'elle a des conséquences agréables, ils proposent de la considérer vraie. Habituellement les mathématiciens ne proposent que des axiomes vrais *a priori* (évidents par eux-mêmes), ici c'est *a posteriori* (après étude de leurs conséquences) qu'ils jugent la détermination projective vraie et souhaitent la prendre comme axiome.

Une des conséquences agréables de l'insertion de ce nouvel axiome dans la théorie des ensembles est qu'il permet de traiter partiellement l'hypothèse du continu. Pour l'expliquer et montrer l'intérêt de cette recherche de nouveaux axiomes, nous devons donc revenir sur l'hypothèse du continu.

L'hypothèse du continu est-elle vraie?

L'hypothèse du continu – proposée par Cantor en 1878 et qui contribua à le rendre fou – affirme qu'il n'y a que deux sortes de sous-ensembles infinis de l'ensemble R des nombres réels : ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les entiers, et ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les nombres réels (voir l'encadré 2).

Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que cette affirmation générale est indépendante des autres axiomes de la théorie des ensembles. K. Gödel montra qu'on n'introduit pas de contradiction en ajoutant l'hypothèse du continu aux axiomes de ZFC, et P. Cohen montra qu'on n'introduit pas de contradiction si on ajoute la négation de l'hypothèse du continu à ZFC. On sait aussi que l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence en arithmétique : en conséquence, tout ce qui peut se démontrer sur les entiers avec l'hypothèse du continu se démontre aussi sans l'utiliser.

Il y a parfois un malentendu sur ce que l'on doit conclure des résultats de K. Gödel et de P. Cohen : certains interprètent cette indépendance de l'hypothèse du continu en disant que le mathématicien peut, selon ses goûts, ajouter, aux axiomes usuels des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation. Cela n'est vrai que si, derrière les ensembles, on considère