

d'hui, car elles sont liées aux aspects les plus mystérieux de la théorie axiomatique des ensembles et, en particulier, aux axiomes de grands cardinaux et à l'hypothèse du continu.

Tout ensemble est-il déterminé?

Les premiers résultats, dus à D. Gale et F. Stewart, datent de 1953 : ces deux mathématiciens démontrèrent que tout ensemble ouvert (voir l'encadré 3) est déterminé. Les deux adversaires jouent comme précédemment, en ajoutant, chacun à leur tour soit 0, soit 1. Avec certains ouverts, comme l'intervalle A égal à $]0, 2/3[$ (tous les nombres entre 0 et $2/3$, à l'exception de 0 et $2/3$), c'est le joueur I qui dispose d'une stratégie gagnante ; pour d'autres, comme A égal à $]1/4, 3/4[$, c'est le joueur II qui est assuré de gagner.

D. Gale et F. Stewart démontrèrent aussi que nous ne devons pas croire que tout ensemble est déterminé : cela conduirait à une contradiction avec un axiome de base de la théorie des ensembles, l'axiome du choix. Cet axiome affirme une évidence : si vous avez une famille d'ensembles non vides, vous pouvez construire un nouvel ensemble en choisissant un élément dans chacun des ensembles de la famille. L'axiome du choix a donné lieu à de nombreux débats au début du siècle, mais les théoriciens des ensembles l'acceptent aujourd'hui.

On envisagea un moment d'adopter l'axiome de détermination complète qui affirme que «tout ensemble est déterminé» et de renoncer à l'axiome du choix. Par analogie avec le cas fini, il est naturel de soutenir que tout ensemble est déterminé, c'est-à-dire qu'il existe une stratégie gagnante pour tout ensemble A . En 1962, J. Mycielski et H. Steinhaus argumentaient de la façon suivante : «Supposons que les deux joueurs soient infiniment intelligents et qu'ils connaissent parfaitement bien l'ensemble A , alors le résultat du jeu ne peut pas dépendre du hasard, et donc l'un des deux doit disposer d'une stratégie gagnante.»

Entre deux énoncés naturels qui se contredisent, ici l'axiome de détermination complète et l'axiome du choix, nous pouvons retenir celui qui nous «arrange» le mieux, et donc l'axiome de détermination complète si nous y trouvons un intérêt.

Cette défense de l'axiome de détermination complète est aujourd'hui jugée peu convaincante, et les mathématiciens préfèrent garder l'axiome du choix, mieux ancré dans l'intuition.

Intéressons-nous aux sous-ensembles des nombres réels R et essayons d'identifier ceux qu'il est raisonnable de considérer déterminés. En simplifiant, les sous-ensembles de R sont classés en quatre catégories, les ouverts, les boréliens, les projectifs et les ensembles qui ne sont pas projectifs (voir l'encadré 3).

La généralisation de la preuve que «tous les ouverts sont déterminés» à «tous les boréliens sont déterminés» nécessita 20 ans de travail et aboutit en 1975 grâce à Donald Martin. L'étape suivante qui aurait été de montrer que tout ensemble projectif est déterminé, affirmation qui s'appelle la *détermination projective*, ne fut jamais franchie. La démonstration était impossible, comme on le comprit en montrant que les axiomes habituels de la théorie des ensembles, s'ils sont sans contradiction, ne démontreront jamais la détermination projective.

Ainsi, pour certains ensembles, on ne peut savoir si le jeu associé possède une stratégie gagnante. Ce résultat est étonnant, mais l'axiome de détermination projective est tellement tentant qu'on ne souhaitait pas l'abandonner, d'autant qu'il permet une théorie belle et efficace des sous-ensembles de R .

Avec l'axiome de détermination complète, certaines démonstrations sont plus directes et plus naturelles que d'autres démonstrations connues. Citons Donald Martin : «Bien que la détermination projective ne puisse être prouvée à partir des axiomes habituels de la théorie des ensembles, elle conduit à une théorie élégante et essentiellement complète des ensembles projectifs, et donc il n'est pas déraisonnable qu'elle soit vraie. Je considère que l'axiome de détermination projective a un statut analogue à une hypothèse en physique : les conséquences de la détermination projective sont si harmonieuses et riches qu'elles constituent une preuve quasi empirique de la détermination projective.» Il devenait donc naturel d'ajouter l'axiome de détermination projective aux autres axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel avec axiome du choix, notée ZFC.

Remarquons l'étrangeté de la situation : les mathématiciens ne réussissant pas à prouver une propriété – ils savent même qu'elle n'est pas prouvable avec les outils habituels –, mais, constatant qu'elle a des conséquences agréables, ils proposent de la considérer vraie. Habituellement les mathématiciens ne proposent que des axiomes vrais *a priori* (évidents par eux-mêmes), ici c'est *a posteriori* (après étude de leurs conséquences) qu'ils jugent la détermination projective vraie et souhaitent la prendre comme axiome.

Une des conséquences agréables de l'insertion de ce nouvel axiome dans la théorie des ensembles est qu'il permet de traiter partiellement l'hypothèse du continu. Pour l'expliquer et montrer l'intérêt de cette recherche de nouveaux axiomes, nous devons donc revenir sur l'hypothèse du continu.

L'hypothèse du continu est-elle vraie?

L'hypothèse du continu – proposée par Cantor en 1878 et qui contribua à le rendre fou – affirme qu'il n'y a que deux sortes de sous-ensembles infinis de l'ensemble R des nombres réels : ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les entiers, et ceux qu'on peut mettre en correspondance terme à terme avec les nombres réels (voir l'encadré 2).

Kurt Gödel et Paul Cohen ont démontré que cette affirmation générale est indépendante des autres axiomes de la théorie des ensembles. K. Gödel montra qu'on n'introduit pas de contradiction en ajoutant l'hypothèse du continu aux axiomes de ZFC, et P. Cohen montra qu'on n'introduit pas de contradiction si on ajoute la négation de l'hypothèse du continu à ZFC. On sait aussi que l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence en arithmétique : en conséquence, tout ce qui peut se démontrer sur les entiers avec l'hypothèse du continu se démontre aussi sans l'utiliser.

Il y a parfois un malentendu sur ce que l'on doit conclure des résultats de K. Gödel et de P. Cohen : certains interprètent cette indépendance de l'hypothèse du continu en disant que le mathématicien peut, selon ses goûts, ajouter, aux axiomes usuels des ensembles, l'hypothèse du continu ou sa négation. Cela n'est vrai que si, derrière les ensembles, on considère

qu'il n'y a aucune réalité et qu'en mathématiques tout n'est que manipulations symboliques dénuées de sens, ce qui est la position dite formaliste en philosophie des mathématiques (soutenue par P. Cohen, par exemple). Au contraire, si, comme K. Gödel, on pense qu'il y a véritablement un monde des ensembles et que notre but doit être, comme en physique, de comprendre sa réalité et d'en faire la théorie, alors le résultat d'indépendance de l'hypothèse du continu ne signifie pas qu'on a la liberté de choisir arbitrairement ce qui nous plaît le mieux, il signifie qu'il faut chercher à compléter les axiomes de la théorie des ensembles, jusqu'à ce qu'on puisse résoudre la question de l'hypothèse du continu. Pour K. Gödel, nous devons chercher à approfondir notre théorie en lui ajoutant de nouvelles lois, comme nous cherchons toujours de nouvelles lois en physique pour améliorer notre description du monde.

Le formaliste réagit généralement à la doctrine réaliste en demandant : «Mais sur quels critères peut-on juger qu'il est souhaitable d'ajouter tel axiome plutôt que sa négation, sachant que ni l'un ni l'autre ne donneront de contradictions, comme c'est le cas pour l'hypothèse du continu?» Le réaliste répond : «Il faut faire comme d'habitude! Nous devons choisir nos nouveaux axiomes sur leur évidence *a priori*, sur leur fécondité, et, pourquoi pas, sur la simplicité et l'harmonie du monde qu'ils font entrevoir».

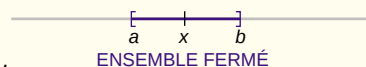
Concernant l'hypothèse du continu, on n'a malheureusement pas d'évidence *a priori* (ni pour ni contre), et les logiciens sont partagés sur ce qui est naturel et harmonieux à son sujet. Les critères *a priori* ne sont donc ici d'aucune aide, semble-t-il, et en tout cas n'entraînent pas l'unanimité.

Pour ce qui est de la fécondité, nous avons vu que l'axiome de détermination projective est très satisfaisant. Son évidence *a priori* laisse cependant à désirer. À la rigueur, on peut défendre l'idée que l'axiome de détermination complète («tous les sous-ensembles de R sont déterminés») est naturel en soi par analogie avec le cas fini, mais il n'y a rien de tel pour l'axiome de détermination projective. Les arguments en faveur de l'axiome de détermination projective sont donc *a posteriori*. Ce n'est pas suffisant pour convaincre un formaliste et n'est pas parfaitement satisfaisant pour un réaliste.

3. ENSEMBLES FERMÉS, OUVERTS, BORÉLIENS, PROJECTIFS

ENSEMBLES FERMÉS

L'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble de tous les points x qui vérifient $a < x < b$ (a et b sont dans $[a, b]$)



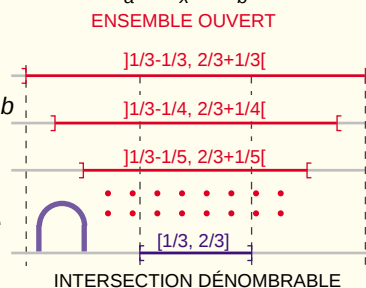
ENSEMBLES OUVERTS

L'intervalle ouvert $]a, b[$ est l'ensemble de tous les points x qui vérifient $a < x < b$ (a et b ne sont pas dans $]a, b[$).

Un ensemble ouvert est un ensemble dont aucun point n'est au bord.

L'intersection de la famille dénombrable d'intervalles ouverts $]1/3-1/n, 2/3+1/n[$ est l'intervalle fermé $[1/3, 2/3]$

La réunion de la famille dénombrable d'intervalles fermés $[1/n, 1-1/n]$ est l'intervalle ouvert $]0, 1[$



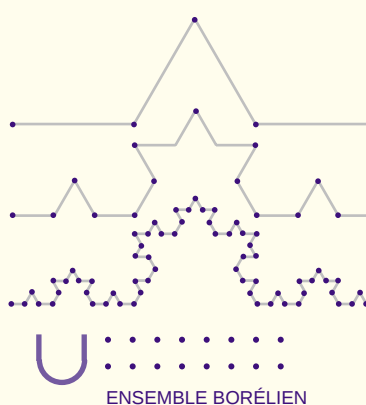
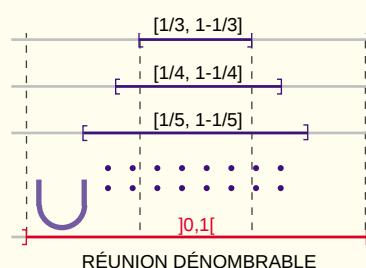
ENSEMBLES BORÉLIENS

Un sous-ensemble de R est dit borélien (du nom d'Émile Borel, mathématicien français, 1871-1956) si on peut l'obtenir à partir d'intervalles ouverts, en faisant une ou plusieurs fois (un nombre fini de fois) des opérations de réunion dénombrable ou d'intersection dénombrable.

Ainsi la réunion de tous les sommets de toutes les courbes de von Koch, à l'infini une fractale, est un ensemble borélien qui n'est ni ouvert, ni fermé.

Une grande majorité des sous-ensembles de R que l'on étudie en mathématiques élémentaires sont boréliens.

L'hypothèse du continu est vraie pour tous les boréliens : tout sous-ensemble borélien infini de R est dénombrable ou a la puissance du continu.



ENSEMBLES PROJECTIFS

F étant une fonction continue, la projection de l'ensemble A par la fonction F est l'ensemble des points $F(a)$, pour tous les points de l'ensemble A .

Un sous-ensemble de R est projectif si on peut le construire à partir d'un ensemble borélien par des passages au complémentaire et des projections par des applications continues. Il existe des sous-ensembles de R qui ne sont pas projectifs.

