

qu'il n'y a aucune réalité et qu'en mathématiques tout n'est que manipulations symboliques dénuées de sens, ce qui est la position dite formaliste en philosophie des mathématiques (soutenue par P. Cohen, par exemple). Au contraire, si, comme K. Gödel, on pense qu'il y a véritablement un monde des ensembles et que notre but doit être, comme en physique, de comprendre sa réalité et d'en faire la théorie, alors le résultat d'indépendance de l'hypothèse du continu ne signifie pas qu'on a la liberté de choisir arbitrairement ce qui nous plaît le mieux, il signifie qu'il faut chercher à compléter les axiomes de la théorie des ensembles, jusqu'à ce qu'on puisse résoudre la question de l'hypothèse du continu. Pour K. Gödel, nous devons chercher à approfondir notre théorie en lui ajoutant de nouvelles lois, comme nous cherchons toujours de nouvelles lois en physique pour améliorer notre description du monde.

Le formaliste réagit généralement à la doctrine réaliste en demandant : «Mais sur quels critères peut-on juger qu'il est souhaitable d'ajouter tel axiome plutôt que sa négation, sachant que ni l'un ni l'autre ne donneront de contradictions, comme c'est le cas pour l'hypothèse du continu?» Le réaliste répond : «Il faut faire comme d'habitude! Nous devons choisir nos nouveaux axiomes sur leur évidence *a priori*, sur leur fécondité, et, pourquoi pas, sur la simplicité et l'harmonie du monde qu'ils font entrevoir».

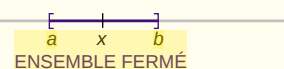
Concernant l'hypothèse du continu, on n'a malheureusement pas d'évidence *a priori* (ni pour ni contre), et les logiciens sont partagés sur ce qui est naturel et harmonieux à son sujet. Les critères *a priori* ne sont donc ici d'aucune aide, semble-t-il, et en tout cas n'entraînent pas l'unanimité.

Pour ce qui est de la fécondité, nous avons vu que l'axiome de détermination projective est très satisfaisant. Son évidence *a priori* laisse cependant à désirer. À la rigueur, on peut défendre l'idée que l'axiome de détermination complète («tous les sous-ensembles de R sont déterminés») est naturel en soi par analogie avec le cas fini, mais il n'y a rien de tel pour l'axiome de détermination projective. Les arguments en faveur de l'axiome de détermination projective sont donc *a posteriori*. Ce n'est pas suffisant pour convaincre un formaliste et n'est pas parfaitement satisfaisant pour un réaliste.

3. ENSEMBLES FERMÉS, OUVERTS, BORÉLIENS, PROJECTIFS

ENSEMBLES FERMÉS

L'intervalle fermé $[a, b]$ est l'ensemble de tous les points x qui vérifient $a < x < b$ (a et b sont dans $[a, b]$)



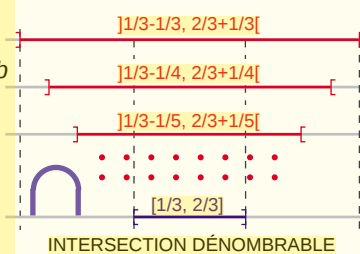
ENSEMBLES OUVERTS

L'intervalle ouvert $]a, b[$ est l'ensemble de tous les points x qui vérifient $a < x < b$ (a et b ne sont pas dans $]a, b[$).

Un ensemble ouvert est un ensemble dont aucun point n'est au bord.

L'intersection de la famille dénombrable d'intervalles ouverts $]1/3-1/n, 2/3+1/n[$ est l'intervalle fermé $[1/3, 2/3]$

La réunion de la famille dénombrable d'intervalles fermés $[1/n, 1-1/n]$ est l'intervalle ouvert $]0, 1[$



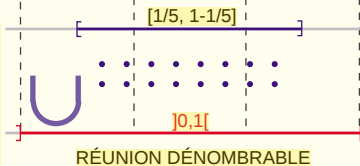
INTERSECTION DÉNOMBRABLE

ENSEMBLES BORÉLIENS

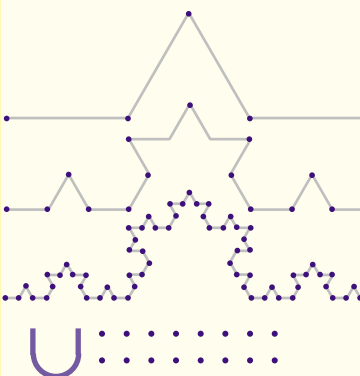
Un sous-ensemble de R est dit borélien (du nom d'Émile Borel, mathématicien français, 1871-1956) si on peut l'obtenir à partir d'intervalles ouverts, en faisant une ou plusieurs fois (un nombre fini de fois) des opérations de réunion dénombrable ou d'intersection dénombrable.

Ainsi la réunion de tous les sommets de toutes les courbes de von Koch, à l'infini une fractale, est un ensemble borélien qui n'est ni ouvert, ni fermé. Une grande majorité des sous-ensembles de R que l'on étudie en mathématiques élémentaires sont boréliens.

L'hypothèse du continu est vraie pour tous les boréliens : tout sous-ensemble borélien infini de R est dénombrable ou a la puissance du continu.



RÉUNION DÉNOMBRABLE

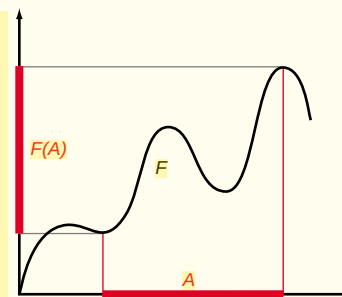


ENSEMBLE BORÉLIEN

ENSEMBLES PROJECTIFS

F étant une fonction continue, la projection de l'ensemble A par la fonction F est l'ensemble des points $F(a)$, pour tous les points de l'ensemble A .

Un sous-ensemble de R est projectif si on peut le construire à partir d'un ensemble borélien par des passages au complémentaire et des projections par des applications continues. Il existe des sous-ensembles de R qui ne sont pas projectifs.



SOUS-ENSEMBLES DE R

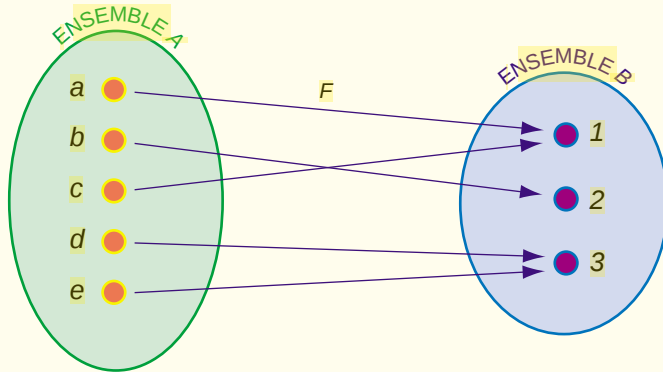
ENSEMBLES PROJECTIFS

ENSEMBLES BORÉLIENS

ENSEMBLES OUVERTS

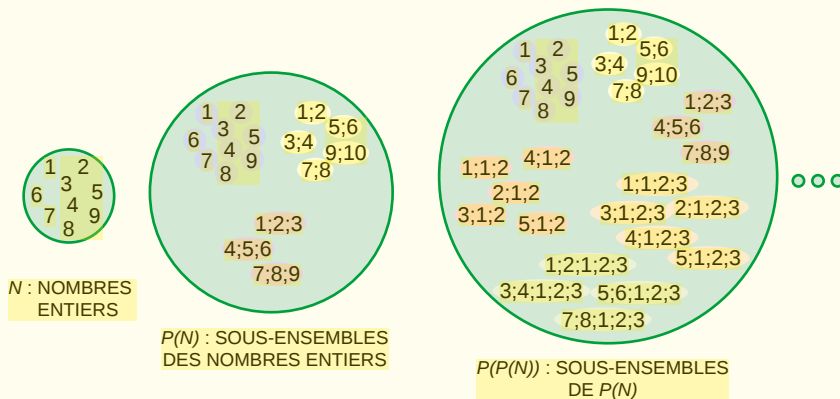
4. UN AXIOME DE GRANDS CARDINAUX

Une surjection de A vers B est une application F qui atteint tout point de B : pour tout élément b dans l'ensemble B , il existe un élément a de l'ensemble A tel que $F(a) = b$.



S'il existe une surjection de l'ensemble A vers l'ensemble B , on dit que A est plus gros que B . Si, de plus, il n'existe pas de surjection de B vers A , on dit que A est strictement plus gros que B .

Cantor a montré que l'ensemble $P(A)$ des parties d'un ensemble A est toujours strictement plus gros que l'ensemble A . Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, N , $P(N)$, $P(P(N))$, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.



Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable A tel que, si A est strictement plus gros que B , alors A est aussi strictement plus gros que l'ensemble $P(B)$ des parties de B .

Un des grands succès de ces dernières années en logique a été la découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, de l'Université de Berkeley, d'un argument d'évidence *a priori* pour l'axiome de détermination projective. L'argument est indirect, mais il vaut la peine d'être compris : il nous amène aux grands cardinaux qui sont au centre des travaux en théorie des ensembles depuis une vingtaine d'années.

Un point semble être certain : si le monde des ensembles existe, il doit être aussi grand que possible. Il serait absurde de considérer que le monde des ensembles s'arrête à tel ou tel niveau, s'il est logiquement possible de le concevoir plus grand : le monde

des ensembles, par une sorte de principe de maximisation, doit être aussi grand que le permet la logique.

Il en résulte qu'à chaque fois qu'on trouve un axiome qui affirme qu'il y a de grands ensembles – de tels axiomes s'appellent les axiomes de grands cardinaux (voir l'encadré 4) – et que cet axiome n'introduit pas de contradiction, on doit l'adopter : tout axiome de grands cardinaux est valide *a priori*.

Une telle justification peut paraître étrange et risquée, mais elle ne l'est pas plus que celle qu'on utilise pour axiomatiser les entiers quand on déclare qu'après tout nombre entier il y en a un autre. Lorsqu'on recherche de nouveaux axiomes, on est réduit à ce genre

de considérations heuristiques, et celles concernant les grands ensembles me semblent parfaitement satisfaisantes (nous allons voir plus loin que les axiomes de grands cardinaux possèdent aussi une justification *a posteriori*).

Comme tout axiome de grands cardinaux est justifié *a priori*, tout ce qui résulte d'un axiome de grands cardinaux est aussi justifié *a priori*. La découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, il y a quelques années, que certains axiomes de grands cardinaux impliquaient l'axiome de détermination projective a comblé les espérances des théoriciens qui proposaient d'adopter l'axiome de détermination projective : non seulement nous avons des raisons *a posteriori* d'adopter l'axiome de détermination projective, mais nous avons aussi des raisons *a priori*. Le réaliste est satisfait, et une partie importante des chercheurs en théorie des ensembles considère aujourd'hui l'axiome de détermination projective comme un axiome sérieux qu'il faut accepter d'ajouter à la théorie classique ZFC.

À ce stade, le lecteur attend impatiemment qu'on lui décrive un grand cardinal, ou mieux qu'on lui indique un moyen de le construire. Hélas, ce n'est pas possible : les ensembles que l'on construit "à partir du bas", avec des unions et des intersections d'ensembles d'entiers, d'ensembles de nombres réels ou d'ensembles de fonctions, ne donnent jamais un grand cardinal. Ce n'est pas une raison pour les rejeter, tout comme on ne rejette pas le nombre π parce que l'on ne sait pas en calculer l'ensemble des décimales. L'incidence des grands cardinaux sur la détermination projective montre bien que leur existence n'est pas sans effet sur les mathématiques ordinaires. De même que les très grands entiers, comme $10^{10^{10}}$, sont des abstractions impensables mais indispensables, les grands cardinaux sont eux aussi impensables et indispensables.

Le réalisme marque des points contre le formalisme

Un progrès plus diffus en théorie des ensembles doit être mentionné, progrès qui fournit une raison *a posteriori* d'adopter les axiomes de grands cardinaux.

Notons d'abord qu'il y a une limite évidente à l'acceptation des grands cardinaux que nous n'avons pas mentionnée pour l'instant : leurs