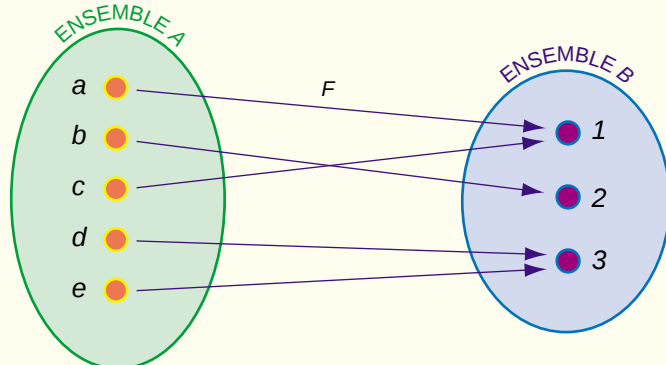


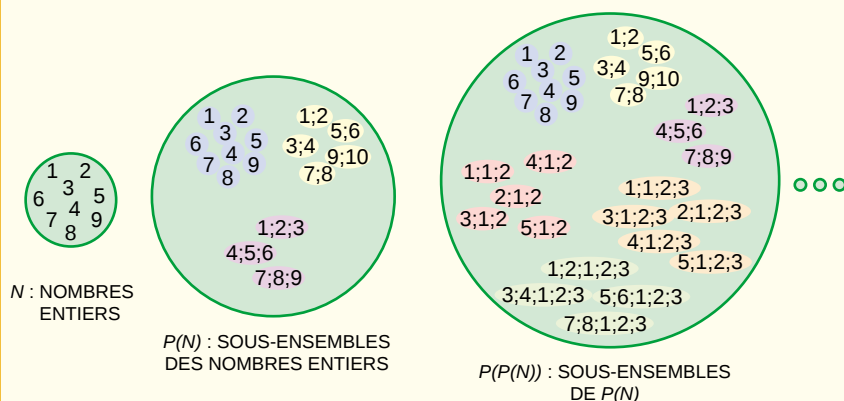
4. UN AXIOME DE GRANDS CARDINAUX

Une surjection de A vers B est une application F qui atteint tout point de B : pour tout élément b dans l'ensemble B , il existe un élément a de l'ensemble A tel que $F(a) = b$.



S'il existe une surjection de l'ensemble A vers l'ensemble B , on dit que A est plus gros que B . Si, de plus, il n'existe pas de surjection de B vers A , on dit que A est strictement plus gros que B .

Cantor a montré que l'ensemble $P(A)$ des parties d'un ensemble A est toujours strictement plus gros que l'ensemble A . Il en résulte qu'il existe une infinité d'ensembles de plus en plus gros, N , $P(N)$, $P(P(N))$, et, accessoirement, qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles.



Voici un exemple d'axiome de grands cardinaux : il existe un ensemble non dénombrable A tel que, si A est strictement plus gros que B , alors A est aussi strictement plus gros que l'ensemble $P(B)$ des parties de B .

Un des grands succès de ces dernières années en logique a été la découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, de l'Université de Berkeley, d'un argument d'évidence *a priori* pour l'axiome de détermination projective. L'argument est indirect, mais il vaut la peine d'être compris : il nous amène aux grands cardinaux qui sont au centre des travaux en théorie des ensembles depuis une vingtaine d'années.

Un point semble être certain : si le monde des ensembles existe, il doit être aussi grand que possible. Il serait absurde de considérer que le monde des ensembles s'arrête à tel ou tel niveau, s'il est logiquement possible de le concevoir plus grand : le monde

des ensembles, par une sorte de principe de maximisation, doit être aussi grand que le permet la logique.

Il en résulte qu'à chaque fois qu'on trouve un axiome qui affirme qu'il y a de grands ensembles – de tels axiomes s'appellent les axiomes de grands cardinaux (voir l'encadré 4) – et que cet axiome n'introduit pas de contradiction, on doit l'adopter : tout axiome de grands cardinaux est valide *a priori*.

Une telle justification peut paraître étrange et risquée, mais elle ne l'est pas plus que celle qu'on utilise pour axiomatiser les entiers quand on déclare qu'après tout nombre entier il y en a un autre. Lorsqu'on recherche de nouveaux axiomes, on est réduit à ce genre

de considérations heuristiques, et celles concernant les grands ensembles me semblent parfaitement satisfaisantes (nous allons voir plus loin que les axiomes de grands cardinaux possèdent aussi une justification *a posteriori*).

Comme tout axiome de grands cardinaux est justifié *a priori*, tout ce qui résulte d'un axiome de grands cardinaux est aussi justifié *a priori*. La découverte par H. Woodin, D. Martin et J. Steel, il y a quelques années, que certains axiomes de grands cardinaux impliquaient l'axiome de détermination projective a comblé les espérances des théoriciens qui proposaient d'adopter l'axiome de détermination projective : non seulement nous avons des raisons *a posteriori* d'adopter l'axiome de détermination projective, mais nous avons aussi des raisons *a priori*. Le réaliste est satisfait, et une partie importante des chercheurs en théorie des ensembles considère aujourd'hui l'axiome de détermination projective comme un axiome sérieux qu'il faut accepter d'ajouter à la théorie classique ZFC.

À ce stade, le lecteur attend impatientement qu'on lui décrive un grand cardinal, ou mieux qu'on lui indique un moyen de le construire. Hélas, ce n'est pas possible : les ensembles que l'on construit "à partir du bas", avec des unions et des intersections d'ensembles d'entiers, d'ensembles de nombres réels ou d'ensembles de fonctions, ne donnent jamais un grand cardinal. Ce n'est pas une raison pour les rejeter, tout comme on ne rejette pas le nombre π parce que l'on ne sait pas en calculer l'ensemble des décimales. L'incidence des grands cardinaux sur la détermination projective montre bien que leur existence n'est pas sans effet sur les mathématiques ordinaires. De même que les très grands entiers, comme $10^{10^{10}}$, sont des abstractions impensables mais indispensables, les grands cardinaux sont eux aussi impensables et indispensables.

Le réalisme marque des points contre le formalisme

Un progrès plus diffus en théorie des ensembles doit être mentionné, progrès qui fournit une raison *a posteriori* d'adopter les axiomes de grands cardinaux.

Notons d'abord qu'il y a une limite évidente à l'acceptation des grands cardinaux que nous n'avons pas mentionnée pour l'instant : leurs

compatibilités mutuelles. En effet, si certains énoncés affirmant l'existence de grands ensembles se contredisent, alors il est impossible de les prendre tous, il faut choisir.

Cette idée que deux axiomes de grands cardinaux pourraient se contredire constitue même un critère permettant de départager la conception réaliste de la conception formaliste en philosophie des mathématiques : si des axiomes de grands cardinaux se contredisaient, c'est que les ensembles seraient des fictions (car alors défendre l'idée d'un unique réel, raison de tout, ne tient plus, et l'on retombe dans l'idée que les extensions acceptables de ZFC sont au libre choix du mathématicien) ; en revanche, si l'on n'en trouve pas, il devient raisonnable de croire qu'il y a quelque chose de réel derrière les formalismes.

Les recherches faites sur ces questions dans les 30 dernières années ont abouti à une situation remarquable et inespérée, qui vient renforcer la position des réalistes et fournit en même temps un argument *a posteriori* en faveur de tous les axiomes de grands cardinaux. Malgré des dizaines et des dizaines de théorèmes sur les relations qu'ils entretiennent, on n'a jamais trouvé d'axiomes de grands cardinaux qui soient incompatibles, et au contraire on s'est aperçu qu'ils se classent les uns par rapport aux autres comme si vraiment ils décrivaient une réalité hiérarchisée conforme aux espérances du réaliste. Pour A. Kanamori et M. Magidor, «cet aspect hiérarchique de la théorie des grands cardinaux est quelque peu mystérieux, mais est aussi un argument fort en faveur de l'adoption des axiomes de grands cardinaux et du fait qu'ils fournissent les extensions naturelles de ZFC».

Le monde ensembliste apparaît organisé, et il n'y a pas d'arbitraire dans les axiomes qu'on doit ajouter à ZFC pour en rendre compte : ils semblent dictés par des nécessités extérieures qu'on peut assimiler à un réel indépendant. La constatation empirique de cet ordre dans les grands ensembles conforte les arguments *a priori* pour les grands cardinaux.

Notons que nombre d'énoncés (avec une exception majeure, sur laquelle nous reviendrons), indépendants des axiomes habituels de la théorie des ensembles, se sont révélés équivalents à des axiomes de grands cardinaux : aussi tout ce qu'il semble

raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective,

la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres

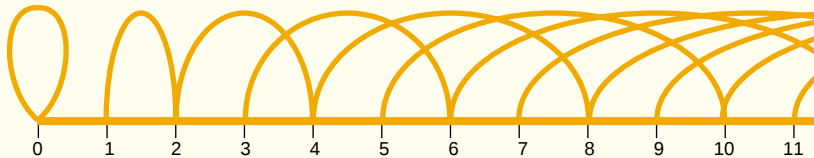
axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de R sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrions formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application $n \rightarrow 2n$ est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.

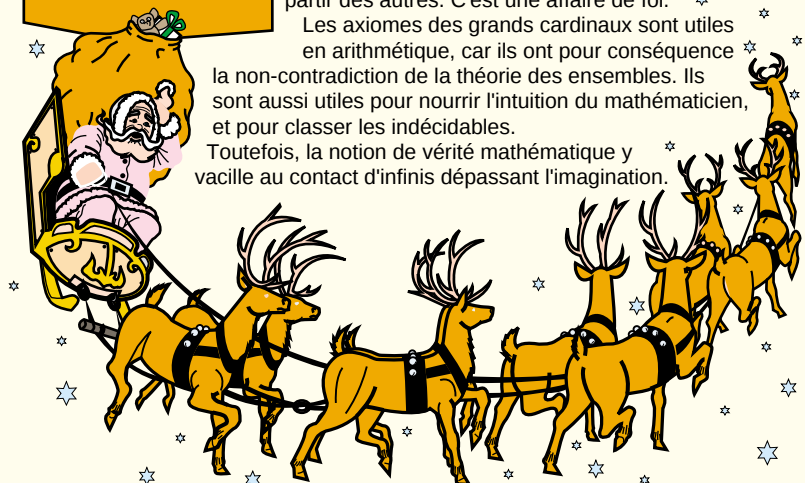


Un ensemble E , tel qu'il existe une injection de E dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi.

GRAND CARDINAL



Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables. Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.