

raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective,

la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres

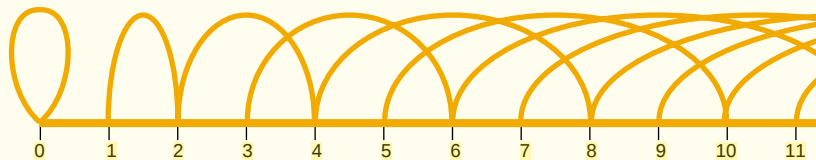
axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de R sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrions formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application $n \rightarrow 2n$ est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.



Un ensemble E , tel qu'il existe une injection de E dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils

sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi. *

Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence *

la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables. *

Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination. *



Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.