

raisonnable d'accepter par des arguments *a posteriori* (comme pour l'axiome de détermination projective) résulte aussi d'hypothèses de grands cardinaux et est, ainsi, justifié *a priori*.

Pour H. Woodin : «La hiérarchie de grands cardinaux semble aussi intrinsèque et absolue que les nombres entiers eux-mêmes. C'est l'une des découvertes majeures en théorie des ensembles depuis 30 ans.»

L'hypothèse du continu, aujourd'hui et demain

Revenons un moment sur l'hypothèse du continu. Peut-on, comme pour l'axiome de détermination projective,

la régler complètement d'une façon qu'on pourrait considérer comme naturelle et, par exemple, montrer qu'elle (ou sa négation) résulte d'un axiome de grands cardinaux? Malheureusement non, car un résultat indique qu'on ne pourra pas traiter complètement de l'hypothèse du continu avec un axiome de grands cardinaux.

Le sentiment général est qu'avec l'axiome de détermination projective et la belle organisation découverte des axiomes de grands cardinaux, on a cependant progressé sur l'hypothèse du continu. En effet, l'axiome de détermination projective, si on le considère comme adjoint aux autres

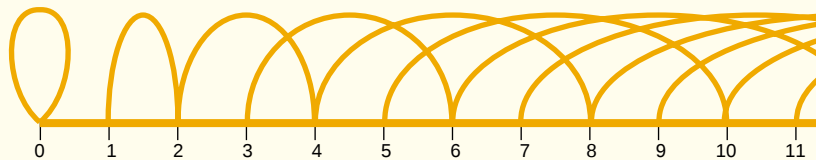
axiomes, permet de traiter mieux la question de savoir si tous les sous-ensembles de R sont dénombrables ou ont la puissance du continu (question posée par l'hypothèse du continu). On peut en effet, grâce à l'axiome de détermination projective, conclure que tout ensemble projectif est, soit dénombrable, soit a la puissance du continu. Cette incidence de l'axiome de détermination projective sur l'hypothèse du continu ne règle pas tout, mais crée la conviction qu'on a avancé et qu'on ira encore plus loin par ces méthodes.

On peut, d'une part, imaginer qu'en formulant des axiomes de grands cardinaux encore plus forts, on progressera toujours et encore, pour traiter «asymptotiquement» tous les cas possibles. On peut, d'autre part, tirer la leçon du travail sur l'axiome de détermination projective que, même dans le doute, il est intéressant d'explorer des axiomes non fondés *a priori* et que la méthode de la recherche d'axiomes par arguments *a posteriori* est féconde.

Peut-être qu'en avançant, nous pourrions formuler d'autres axiomes justifiés *a posteriori*, dont certains pourraient résoudre l'hypothèse du continu et aussi identifier plus précisément pour quels jeux infinis il existe des stratégies gagnantes. Pour H. Woodin, «il est devenu raisonnable d'espérer que notre compréhension progresse jusqu'au point où la solution de l'hypothèse du continu sera possible».

5. LES AXIOMES DE GRANDS CARDINAUX SONT AFFAIRE DE FOI

Un ensemble infini est un ensemble tel qu'il existe une injection (une application vérifiant que deux points différents ont toujours deux images différentes) de l'ensemble dans une partie de lui-même. L'application $n \rightarrow 2n$ est une telle injection de l'ensemble des entiers dans une partie de lui-même (les entiers pairs) différente de lui-même.

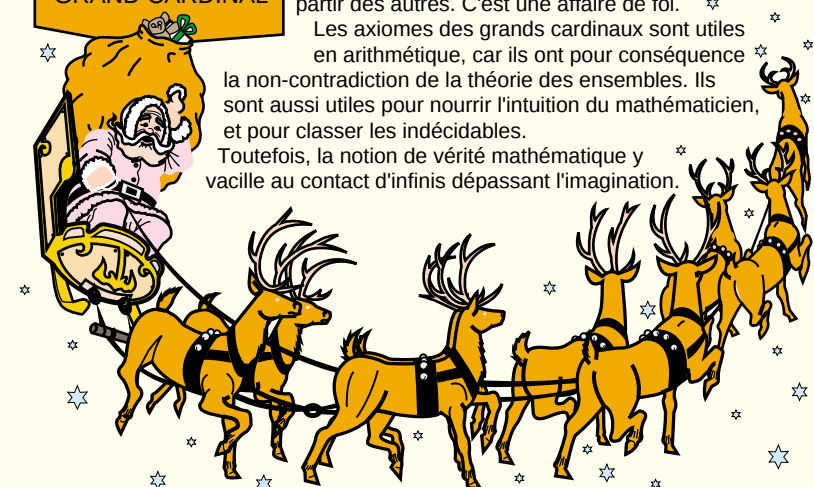


Un ensemble E , tel qu'il existe une injection de E dans lui-même, est très grand. Cette idée d'injection est féconde. En imposant aux injections de vérifier des propriétés de plus en plus nombreuses, on définit des infinis de plus en plus sévères, c'est-à-dire des ensembles de plus en plus grands. C'est l'une des méthodes pour définir des axiomes de grands cardinaux.

Les axiomes de grands cardinaux sont considérés comme naturels, car si le monde des ensembles existe, alors il doit contenir le plus possible d'ensembles, et donc tous les grands ensembles y sont les bienvenus.

Cependant ces axiomes, dans la majorité des cas, font partie des indécidables de Gödel de la théorie des ensembles : avec les axiomes habituels, on ne peut prouver ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il faut donc les accepter tels quels, sans que l'on puisse espérer les démontrer à partir des autres. C'est une affaire de foi.

GRAND CARDINAL



Les axiomes des grands cardinaux sont utiles en arithmétique, car ils ont pour conséquence la non-contradiction de la théorie des ensembles. Ils sont aussi utiles pour nourrir l'intuition du mathématicien, et pour classer les indécidables.

Toutefois, la notion de vérité mathématique y vacille au contact d'infinis dépassant l'imagination.

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université des sciences et techniques de Lille et directeur adjoint du Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille du CNRS.

J. BARWISE ed. *Handbook of Mathematical Logic*, North Holland, Amsterdam, 1977.

P. MADDY, *Realism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

A. KANAMORI, *The Higher Infinite*, Springer-Verlag, New York, 1994.

H. WOODIN, *Large Cardinal Axioms and Independence : The Continuum Problem Revisited*, in *Mathematical Intelligencer*, vol. 16, n° 3, pp. 31-35, 1994.

P. DEHORNOY, *Un rôle nouveau pour la théorie des ensembles ?*, Département de mathématiques, Université de Caen, mars 1995.

Piero della Francesca, peintre mathématicien

ENRICO GAMBA • VICO MONTEBELLI

Ce grand peintre était aussi l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a adapté les mathématiques savantes aux besoins des techniciens.

Les tableaux de Piero della Francesca (1415-1492) sont aujourd'hui connus dans le monde entier ; ses travaux sur la perspective sont plus confidentiels et son œuvre mathématique est complètement ignorée. Piero della Francesca était pourtant un mathématicien réputé en son temps : selon Giorgio Vasari, qui publia en 1550 *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes*, Piero «ne s'éloigna jamais des mathématiques», discipline où il était «tenu pour un grand maître», à tel point qu'il «comprit [Euclide] mieux que quiconque».

Cette double qualité, de peintre et d'homme de science, évoque immédiatement Léonard de Vinci, plus jeune que Piero della Francesca d'une quarantaine d'années. Toutefois, selon Vasari, tandis que Léonard passait sans cesse des fresques aux miroirs et des machines à l'anatomie, Piero était rationnel et systématique. C'était le «meilleur géomètre de son époque».

Les dessins techniques et les écrits de Léonard, abondants et variés, sont désordonnés, comme des notes d'atelier ou de chantier ; ils n'étaient pas publiables tels quels. En revanche, Piero a écrit trois traités, de quelques centaines de pages au total : *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Petit livre à propos des cinq corps réguliers*), *De prospectiva pingendi* (*La perspective pour la peinture*) et *Trattato d'abaco* (*Traité de l'abaque*). Ces traités, qui contiennent des parties appliquées et des parties théoriques, sont compacts et ordonnés, surtout en comparaison avec les livres des techniciens de l'époque, dont Piero était.

Au Moyen Âge et à la Renaissance, les marchands, les artisans, les artistes et, de manière générale, les techniciens

étaient formés dans les écoles d'abaque et dans les ateliers. Le terme abaque ne désigne pas l'ancien instrument de calcul, mais la discipline, voire le texte écrit et l'école elle-même. Les écoles d'abaque sont comparables aux instituts professionnels actuels : on apprend en regardant faire et en faisant. Les apprentis exerçaient leur sens de l'observation et leur raisonnement sur des cas concrets, spécifiques de la profession qu'ils apprenaient. Tout savoir théorique indépendant d'une réalisation concrète était exclu ; les rares manuels ne contenaient aucune trace de théorie. Nous les considérerions aujourd'hui comme des carnets de notes : aide-mémoire pour ceux qui savaient déjà, ils étaient quasi incompréhensibles pour tous les autres. Ils étaient écrits en langue vulgaire, langue des techniciens, tandis que les savants utilisaient le latin ; les théories théologiques, philosophiques, juridiques, médicales, mathématiques, mécaniques ou astrologico-astronomiques étaient toujours formulées en latin, langue plus précise, adaptée au cadre doctrinal.

L'étude des polyèdres réguliers

Les ouvrages mathématiques de Piero sont plus proches des canons théoriques euclidiens que des normes des techniciens. Le traité qui concerne le plus la géométrie formelle est le *Libellus de quinque corporibus regularibus*, dont la portée dépasse largement ce qu'annonce son titre. Après un chapitre de géométrie plane, les deux chapitres centraux s'intéressent aux cinq polyèdres réguliers, c'est-à-dire dont les faces sont des polygones réguliers

tous identiques : le tétraèdre (dont les faces sont des triangles équilatéraux), le cube (composé de six carrés), l'octaèdre (composé de huit triangles équilatéraux), le dodécaèdre (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers) et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Ils sont prolongés par un chapitre consacré à cinq polyèdres semi-réguliers, ainsi qu'à d'autres corps solides.

Le *Libellus* est une œuvre singulière : comparé aux livres d'abaque, désordonnés et traitant peu de géométrie, son contenu fondamentalement géométrique est remarquable. C'est le premier ouvrage européen entièrement consacré à l'étude des polyèdres, qui avait pourtant commencé avec Platon et Pythagore. Piero della Francesca lui donne un nouveau souffle : grâce au *Libellus*, les polyèdres, longtemps considérés comme des objets purement théoriques, redeviennent des sujets d'étude mathématique, des éléments ornementaux, des objets de dessin exemplaires.

L'originalité du *Libellus* provient aussi du lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer : dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeltre, le seigneur d'Urdino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des «choses d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens».

Le *Libellus* suit la tradition de l'abaque : ses 140 propositions traitent toujours de figures géométriques aux dimensions déterminées. On donne des mesures de grandeurs et l'on