

Piero della Francesca, peintre mathématicien

ENRICO GAMBA • VICO MONTEBELLI

Ce grand peintre était aussi l'un des plus grands mathématiciens de son époque. Il a adapté les mathématiques savantes aux besoins des techniciens.

Les tableaux de Piero della Francesca (1415-1492) sont aujourd'hui connus dans le monde entier ; ses travaux sur la perspective sont plus confidentiels et son œuvre mathématique est complètement ignorée. Piero della Francesca était pourtant un mathématicien réputé en son temps : selon Giorgio Vasari, qui publia en 1550 *Les vies des meilleurs peintres, sculpteurs et architectes*, Piero «ne s'éloigna jamais des mathématiques», discipline où il était «tenu pour un grand maître», à tel point qu'il «comprit [Euclide] mieux que quiconque».

Cette double qualité, de peintre et d'homme de science, évoque immédiatement Léonard de Vinci, plus jeune que Piero della Francesca d'une quarantaine d'années. Toutefois, selon Vasari, tandis que Léonard passait sans cesse des fresques aux miroirs et des machines à l'anatomie, Piero était rationnel et systématique. C'était le «meilleur géomètre de son époque».

Les dessins techniques et les écrits de Léonard, abondants et variés, sont désordonnés, comme des notes d'atelier ou de chantier ; ils n'étaient pas publiables tels quels. En revanche, Piero a écrit trois traités, de quelques centaines de pages au total : *Libellus de quinque corporibus regularibus* (*Petit livre à propos des cinq corps réguliers*), *De prospectiva pingendi* (*La perspective pour la peinture*) et *Trattato d'abaco* (*Traité de l'abaque*). Ces traités, qui contiennent des parties appliquées et des parties théoriques, sont compacts et ordonnés, surtout en comparaison avec les livres des techniciens de l'époque, dont Piero était.

Au Moyen Âge et à la Renaissance, les marchands, les artisans, les artistes et, de manière générale, les techniciens

étaient formés dans les écoles d'abaque et dans les ateliers. Le terme abaque ne désigne pas l'ancien instrument de calcul, mais la discipline, voire le texte écrit et l'école elle-même. Les écoles d'abaque sont comparables aux instituts professionnels actuels : on apprendait en regardant faire et en faisant. Les apprentis exerçaient leur sens de l'observation et leur raisonnement sur des cas concrets, spécifiques de la profession qu'ils apprenaient. Tout savoir théorique indépendant d'une réalisation concrète était exclu ; les rares manuels ne contenaient aucune trace de théorie. Nous les considérerions aujourd'hui comme des carnets de notes : aide-mémoire pour ceux qui savaient déjà, ils étaient quasi incompréhensibles pour tous les autres. Ils étaient écrits en langue vulgaire, langue des techniciens, tandis que les savants utilisaient le latin ; les théories théologiques, philosophiques, juridiques, médicales, mathématiques, mécaniques ou astrologico-astronomiques étaient toujours formulées en latin, langue plus précise, adaptée au cadre doctrinal.

L'étude des polyèdres réguliers

Les ouvrages mathématiques de Piero sont plus proches des canons théoriques euclidiens que des normes des techniciens. Le traité qui concerne le plus la géométrie formelle est le *Libellus de quinque corporibus regularibus*, dont la portée dépasse largement ce qu'annonce son titre. Après un chapitre de géométrie plane, les deux chapitres centraux s'intéressent aux cinq polyèdres réguliers, c'est-à-dire dont les faces sont des polygones réguliers

tous identiques : le tétraèdre (dont les faces sont des triangles équilatéraux), le cube (composé de six carrés), l'octaèdre (composé de huit triangles équilatéraux), le dodécaèdre (dont les 12 faces sont des pentagones réguliers) et l'icosaèdre (dont les 20 faces sont des triangles équilatéraux). Ils sont prolongés par un chapitre consacré à cinq polyèdres semi-réguliers, ainsi qu'à d'autres corps solides.

Le *Libellus* est une œuvre singulière : comparé aux livres d'abaque, désordonnés et traitant peu de géométrie, son contenu fondamentalement géométrique est remarquable. C'est le premier ouvrage européen entièrement consacré à l'étude des polyèdres, qui avait pourtant commencé avec Platon et Pythagore. Piero della Francesca lui donne un nouveau souffle : grâce au *Libellus*, les polyèdres, longtemps considérés comme des objets purement théoriques, redeviennent des sujets d'étude mathématique, des éléments ornementaux, des objets de dessin exemplaires.

L'originalité du *Libellus* provient aussi du lien qu'il établit entre la géométrie euclidienne et les mathématiques de l'abaque, c'est-à-dire entre les mathématiques des savants et celles des techniciens. Piero est conscient d'être parmi les premiers à s'y essayer : dans sa dédicace à Guidobaldo de Montefeltre, le seigneur d'Urdino où il vivait, il affirme que la nouveauté de son travail réside dans la transposition des «choses d'Euclide et des géomètres vers les arithméticiens».

Le *Libellus* suit la tradition de l'abaque : ses 140 propositions traitent toujours de figures géométriques aux dimensions déterminées. On donne des mesures de grandeurs et l'on

demande de trouver la valeur numérique d'autres grandeurs inconnues. En outre, le *Libellus* ne contient pas de démonstrations, du moins selon les modalités classiques. Enfin, il s'inscrit aussi dans la tradition de l'abaque, parce que, dans le calcul des grandeurs géométriques, il utilise autant des procédures géométriques que des règles arithmétiques et algébriques.

D'un autre côté, le *Libellus* s'inscrit dans la tradition euclidienne par l'ordre logique des propositions et par des références aux *Éléments* d'Euclide et aux œuvres d'Archimède *De la sphère et du cylindre* et *Des conoïdes et des sphéroïdes*. Les théorèmes n'y sont pas dégradés en petites règles empiriques appliquées, usage courant chez les techniciens, qui préféraient une règle simple et approximative à une règle exacte, mais complexe : ils sont utilisés de façon coordonnée.

Mélanger théorie et application

Ce mélange de mathématique «haute» et «basse» devait apparaître à Piero comme un tout homogène ou, du moins, lié. Il fait siens avec maestria les théorèmes du livre XIII des *Éléments*, qui établissent les relations entre les longueurs des arêtes des polyèdres et le diamètre de la sphère circonscrite. Il écrit que l'arête du tétraèdre est la moyenne géométrique (la racine carrée du produit) de la hauteur du tétraèdre et du diamètre de la sphère circonscrite, ou que l'arête du dodécaèdre est la section d'or de l'arête du cube inscrit dans la même sphère (la section d'or d'un segment AB est réalisée en un point M du segment AB tel que le rapport des longueurs AB à AM soit égal au rapport des longueurs AM à MB). En même temps, il dresse le tableau des valeurs numériques des arêtes des cinq polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre, icosaèdre) inscrits dans une sphère de diamètre 12. Ce qui nous semble un cas particulier satisfaisait pleinement le milieu de l'abaque, car 12 est multiple de 2, 3, 4 et 6 : si le diamètre de la sphère était triple ou de moitié, il suffisait respectivement de multiplier par trois ou de diviser par deux la valeur de l'arête.

Toutefois, même s'il utilise le style de l'abaque, Piero s'inspire d'Euclide. Celui-ci conclut les *Éléments* avec un théorème qui relie les arêtes des poly-

èdres inscrits dans une même sphère ; Piero conclut de la même manière le second chapitre du *Libellus*, mais avec des valeurs numériques, avec les mesures des arêtes des polyèdres inscrits dans la sphère de diamètre 12.

La donnée de valeurs numériques simples était nécessaire pour les techniciens, qui, peu familiers avec l'écriture et soucieux de préserver les secrets de leur profession, faisaient confiance à leur mémoire. Pour les commerçants, le calcul mental rapide était vital : dans une négociation, il faut évaluer rapidement les bénéfices des deux parties. La mémorisation de règles synthétiques, comme des proverbes, et de paramètres numériques était la méthode la plus sûre, la plus écono-

mique et la plus rapide. En conséquence, la règle de trois était fréquemment utilisée en géométrie (ce qui n'est pas le cas aujourd'hui).

La règle de trois a peut-être aussi donné à Piero l'idée de son calcul de l'aire du pentagone régulier. Dans le livre XIV des *Éléments* (qui n'est pas d'Euclide, mais d'Hypsicle, et qui était connu du temps de Piero comme le livre XV), on trouve la formule suivante : l'aire est égale au produit des $3/4$ du diamètre du cercle circonscrit par les $5/6$ de la corde du pentagone. Piero propose une formule plus simple (voir la figure 2) : l'aire d'un pentagone régulier est déterminée par les $5/8$ du produit du diamètre du cercle circonscrit par la longueur de la corde du pentagone (le



1. PORTRAIT DE PIERO DELLA FRANCESCA attribué à Santi di Tito, probablement réalisé à la fin du XVI^e siècle. L'auteur du portrait a davantage rendu hommage au mathématicien qu'à l'artiste : les œuvres d'Euclide et d'Archimède posées sur la table sont éloquentes.